



# La commande des systèmes dynamiques sous contraintes Interaction optimisation-géométrie-commande

Sorin Olaru

## ► To cite this version:

Sorin Olaru. La commande des systèmes dynamiques sous contraintes Interaction optimisation-géométrie-commande. Automatique / Robotique. Université Paris Sud - Paris XI; STITS (Sciences et Technologies de l'Information des Télécommunications et des Systèmes), 2011. tel-00641658

**HAL Id: tel-00641658**

**<https://theses.hal.science/tel-00641658>**

Submitted on 16 Nov 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## **Mémoire**

Présenté pour obtenir

### **L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES DE L'UNIVERSITE PARIS-SUD 11**

La commande des systèmes dynamiques sous contraintes  
Interaction optimisation-géométrie-commande

par

**Sorin OLARU**

Soutenue le *24 Mai 2011* devant la Commission d'examen :

M. Didier Dumur, SUPELEC

M. Silviu Niculescu, Laboratoire de Signaux et Systèmes

M. Vladimir Rasvan, Université de Craiova (Roumanie)

M. Vincent Wertz, Université Catholique de Louvain (Belgique)

*Rapporteurs :*

M. Dimitri Lefebvre, Université Le Havre

M. Mohammed M'Saad, Université de Caen

M. Janan Zaytoon , Université Reims

**Résumé** Dans ce mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches, seront présentées les recherches menées ces cinq dernières années sur des sujets liés à la commande sous contraintes, à la commande basée sur l'optimisation temps-réel et aux méthodes géométriques en Automatique.

La première partie du mémoire décrit le parcours académique permettant de recadrer les résultats de recherche dans un parcours scientifique avec toutes ses dimensions : la formation, l'enseignement, la recherche, le développement et la participation à la vie de la communauté.

Dans la deuxième partie, nous retraçons le chemin de la commande optimale à la commande basée sur l'optimisation. Avec ce panorama historique nous montrerons que les recherches dans ce domaine ont toujours été partagées entre les travaux théoriques et les applications à visée industrielle. Ce panorama sera suivi d'une revue de méthodes géométriques utilisées en automatique, qui identifie une direction dans laquelle s'inscrit notre recherche. Nous insisterons sur les contributions dans le domaine avant d'établir un projet de recherche à court, moyen et long terme.

La troisième partie contient une synthèse des travaux de recherche publiés récemment sur les sujets mentionnés précédemment afin d'offrir une image des directions explorées et des concepts clés qui ont guidé nos recherches dans les cinq dernières années. L'analyse des polyèdres paramétrés est présentée comme un problème de géométrie avec des implications multiples dans la commande prédictive sous contraintes dans le cas linéaire et hybride. Spécifiquement pour la commande prédictive des systèmes hybrides, des approches alternatives basées sur l'adaptation du modèle de prédiction en vue de l'exploitation des routines d'optimisation évoluées (algorithmes génétiques, etc.) ont été développées. Les outils géométriques sont utilisés aussi dans des problèmes plus éloignés de la commande prédictive comme le cas de la modélisation des systèmes affectés par un retard variable. Ici, les techniques géométriques permettent la description des modèles linéaires polytopiques qui peuvent être utilisés par la suite dans une procédure de synthèse de lois de commande robuste (et prédictive accessoirement). Finalement, dans un tout autre domaine, celui de la commande des systèmes multi-capteurs, on montre que les méthodes ensemblistes peuvent apporter des réponses pour les défis de détection et isolation des défauts. Quant à la commande prédictive, elle offre le cadre approprié pour la reconfiguration, l'autre aspect majeur de ce qu'on appelle communément "la conception d'un système de commande tolérant aux défauts".

## Table des matières

### CV détaillé

C-1	Etat Civil .....	1
C-2	Formation universitaire .....	2
C-3	Parcours et évolution de carrière .....	5
C-4	Enseignement dispensé .....	7
C-5	Activité de recherche .....	10
C-6	Reconnaissance des résultats de recherche .....	11
C-7	Participation à la vie de la communauté scientifique .....	12
C-8	Encadrement de travaux de recherche .....	19
C-9	Collaborations scientifiques .....	23
C-10	Management de projet .....	29
C-11	Gestion de carrière académique, politique de la recherche .....	31
C-12	Autres aspects liés au profil d'enseignant-chercheur .....	32
C-13	Publications .....	33

### Activités de recherche

P-1	Quelques considérations sur l'interaction optimisation-commande ...	40
P-2	La commande prédictive dans une perspective historique .....	43
P-3	Contributions personnelles dans le domaine .....	51
P-4	Projet de recherche .....	70

### Synthèse des travaux récents

#### *Partie I : Une vision géométrique*

I-1	Introduction .....	76
I-2	Les domaines polyédraux et les polyèdres paramétrés .....	78
I-3	Solutions explicites - le cas des fonctions de coût quadratique .....	82
I-4	Solutions explicites - le cas de fonctions de coût linéaire .....	83
I-5	La prise en compte des non-linéarités .....	96
I-6	Exemple numérique .....	102

#### *Partie II : Commande prédictive des systèmes hybrides*

II-1	Introduction .....	109
II-2	Commande prédictive pour systèmes hybrides .....	111
II-3	Problème d'optimisation .....	114
II-4	Aspects géométriques et solutions explicites .....	118
II-5	Algorithmes génétiques .....	127
II-6	Application .....	138

**Partie III : MPC et retard variable**

III-1 Introduction .....	144
III-2 La problématique .....	145
III-3 Le modèle de prédiction .....	147
III-4 Ensembles invariants .....	151
III-5 Commande prédictive .....	154
III-6 Exemples .....	156
III-7 Choix de paramètres MPC pour la robustesse .....	160
III-8 Ensembles invariants maximaux .....	161
III-9 Exemple .....	163

**Partie IV : Systèmes multi-capteur**

IV-1 Introduction .....	169
IV-2 Schéma de commande multi-capteurs .....	170
IV-3 La construction des ensembles invariants .....	173
IV-4 Stratégie de commande avec commutation .....	183
IV-5 Exemple .....	187
IV-6 Extensions pour le cas non-linéaire .....	189
IV-7 Estimations .....	191
IV-8 Ensembles invariants .....	191
IV-9 La réconfiguration et la commande à horizon glissant .....	195

**Partie V : Perspectives**

V-1 Perspectives à court terme .....	197
V-2 Perspectives à moyen terme .....	201
V-3 Perspectives à long terme .....	202
Bibliographie .....	205

## CV détaillé

### C-1 Etat Civil

**Sorin OLARU**

**Date de naissance :** 09 Février 1978

**Lieu de naissance :** Câmpulung, Département Arges

**Pays :** Roumanie

**Etat Civil :** Marié, 2 enfants

**Statut actuel :** Professeur associé

**Établissement :** SUPELEC

**Laboratoire :** Département d'Automatique

**Équipe d'accueil :** E3S (Supélec Sciences des Systèmes) - EA 4454

**École doctorale :** STITS (Sciences et Technologies de l'Information  
des Télécommunications et des Systèmes) - ED no. 422

**Telephone :** 01.69.85.13.76

**Emails :** sorin.olaru@supelec.fr ; sorin.olaru@ieee.org

**Page web :** [www.supelec.fr/deptauto/Pers/Olaru.fr.html](http://www.supelec.fr/deptauto/Pers/Olaru.fr.html)

**Adresse postale :**

Département Automatique SUPELEC 3 rue Joliot Curie, Plateau de Moulon, 91192 Cedex, Gif sur Yvette, France
---

## C-2 Formation universitaire

### C-2.1 Formation diplômante

#### **Doctorat en automatique :** Université Paris-Sud XI

- Laboratoire d'accueil : SUPELEC Département d'Automatique (EA1399)
- Ecole doctorale : Sciences et Technologies de l'Information des Télécommunications et des Systèmes
- Thèse "Contribution à l'étude de la commande prédictive sous contraintes par approche géométrique"
- Préparation 2002-2005
- Soutenance : 23 Septembre 2005
- Jury :
  - Eric Walter (Président du jury)
  - Vincent Wertz (Rapporteur)
  - Patrick Boucher (Examineur)
  - Dominique Bonvin (Examineur)
  - Luc Dugard (Rapporteur)
  - Didier Dumur (Directeur de thèse)

#### **Doctorat en automatique :** Université "Politehnica" Bucarest

- Laboratoire d'accueil : Faculté d'Automatique et Science des Ordinateurs
- Équipe d'Automatique et l'Ingénierie des Systèmes
- Domaine de recherche : Automatique, Traitement du Signal, Géométrie Informatique
- Thèse "Contributii la studiul legilor de comanda predictiva"
- Préparation 2003-2010
- Soutenance : 12 Mars 2010
- Jury :
  - Ioan Dumitrache (Directeur de thèse)
  - Vladimir Rasvan (Rapporteur)
  - Corneliu Lazar (Rapporteur)
  - Nicolae Constantin (Rapporteur)
  - Dumitru Popescu (Président du jury)

**Diplôme d'études approfondies (D.E.A.) : Université "Politehnica" Bucarest**

- Faculté d'Automatique et Science des Ordinateurs
- Spécialisation : " Systèmes intelligents "
- Mémoire : " Commande prédictive sous contraintes dans un environnement temps-réel "
- Années d'études 2001-2002, Dissertation Juillet 2002
- Moyenne des années d'études 9,50/10
- Classement 1/24
- Dissertation 10/10

**Diplôme d'ingénieur : Université "Politehnica" Bucarest**

- Faculté d'Automatique et Science des Ordinateurs
- Spécialisation : Automatique et Ingénierie des Systèmes (profil électrique)
- Projet de fin d'études " Commande et estimation d'état pour les systèmes hybrides "
- Années d'études 1996-2001, Dissertation Septembre 2001
- Moyenne des années d'études 9,86/10
- Classement 2/169
- Dissertation 10/10

**C-2.2 Formation non-diplomante**

**Spécialisation en cybernétique : Académie des Études Économiques**

- Bucarest
  - Faculté de Cybernétique, Statistique et Informatique économique
  - Spécialisation : "Informatique économique"
  - Années d'études 1998-2001
  - Moyenne des années d'études 7,31/10



### C-2.3 Autres spécialisations et stages

- **Doctoral-level Courses in Advanced Nuclear Science :** "Experimental Validation and Calibration of Numerical Simulation Models"
  - Organisateur : International School in Nuclear Engineering (CEA - INSTN)
  - Professeur : Prof. D.G. Cacuci
  - Date : 29 Septembre - 3 Octobre, 2008
- **Doctoral-level Courses in Advanced Nuclear Science :** "Reactor Kinetics and Dynamics"
  - Organisateur : International School in Nuclear Engineering (CEA - INSTN)
  - Professeur : Jack Dorning
  - Date : 6- 10 Octobre, 2008
- **HYCON-EECI Graduate School on Control :** "An Introduction to Networked Control Systems"
  - Organisateur : European Embedded Control Institute
  - Professeur : Richard Murray
  - Date : 17 Mars - 21 Mars, 2008
- **HYCON-EECI Graduate School on Control :** "Verification and control of Nonlinear and Hybrid Systems"
  - Organisateur : European Embedded Control Institute
  - Professeurs : A. Bayen et I. Mitchell
  - Date : 12 Janvier - 16 Janvier, 2009
- **Cours niveau doctoral :** "Reduced-Order Model Development and Control Design"
  - Organisateur : SIAM (à l'occasion de *Conference on Control and its Applications*)
  - Professeurs : Jeff Borggaard et Karl Kunisch
  - Période : Juillet 2005
- **École d'été :** "Commande et estimation sous contraintes"
  - Organisateur : LAG (Grenoble, France)
  - Professeurs : Graham C. Goodwin, Maria Seron, Jose De Dona, David Mayne
  - Période : Septembre 2005
- **Cours :** "LMI optimization with applications in control"
  - Organisateur : Université Technique Tchèque, Prague, République Tchèque
  - Professeurs : Didier Henrion, LAAS-CNRS, Toulouse, France
  - Période : Novembre 2003

## C-3 Parcours et évolution de carrière

### C-3.1 Repères de la carrière académique

#### **Professeur Associé : SUPELEC**

- Période : Janvier 2010 à ce jour
- Département d'Automatique
- Équipe de recherche : E3S (Directeur : Gilles Fleury) EA 4454
- Groupe : SyDICO (Coordinateur : Patrick Boucher)

#### **Chercheur associé : équipe-projet INRIA**

- Période : 2010 à ce jour
- Équipe-projet : DISCO (INRIA Saclay - CNRS - SUPELEC)
- Responsable d'équipe : Catherine Bonnet

#### **Professeur Assistant : SUPELEC**

- Période : 2005-2009
- Équipe : EA 1389
- Directeur : Patrick Boucher
- Groupe de recherche : Commande Prédictive

#### **Chercheur débutant : SUPELEC (doctorant)**

- Période : 2002-2005
- Groupe de recherche : Commande Prédictive
- Coordinator : Didier Dumur
- Équipe : EA 1389

#### **Ingénieur développement logiciel (Software development engineer)**

- Institution : INRIA/IRISA - Institut National de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires - Rennes, France
- Période : Octobre 2001- Octobre 2002
- Projet : COSI (R2D2)
- Sujet : POLYLIB (bibliothèque de calcul polyédral)
- Chef d'équipe : François Charot

#### **Assistant universitaire : Université "Politehnica" Bucarest**

- Période : 2001-2002
- Faculté d'Automatique et Ordinateurs
- Département : Automatique et ingénierie des systèmes
- Chef de Département : Prof. Ioan Dumitrache

#### **Stagiaire : Kvaerner IMGB Bucarest**

- Période : Ete 2000
- Équipe : Informatique

#### **Stagiaire : Université "Politehnica" Bucarest**

- Période : 1999-2000
- Position : Participation dans le projet FABRICATOR - *University project of virtual enterprise at the "Human Resources Training Centre"*
- Équipe : Computer aided control system design
- Coordinateur : Prof. Aurelian Stanescu

### C-3.2 Séjours à l'étranger

1. NTNU, Trondheim - Norvège
  - Période : Mars 2006
  - Invitation : Collaboration avec Morten Hovd
  - Thème de recherche : "Etude d'atteignabilité liée à la commande prédictive"
2. The University of Newcastle, Australia
  - Période : Mai - Juin 2007
  - Invitation : Collaboration avec J. DeDona, M. Seron et G. Goodwin
  - Thème de recherche : "Fault Tolerant Control"
3. Bernoulli Center : École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)
  - Période : Avril 2009
  - Objet : chercheur invité dans le programme thématique "Advances in the Theory of Control Signals and Systems with Physical Modeling"
4. Lund Center for Control of Complex Engineering Systems
  - Période : Mai 2010
  - Objet : chercheur invité dans le cadre du programme thématique "Distributed model predictive control and supply chains"
5. NTNU, Trondheim - Norvège
  - Période : Avril-Mai 2010
  - Cadre : Yggdrasil - young guest and doctoral researchers' annual scholarships for investigation and learning (ISMOBIL)
  - Thème de recherche : "Extension of the theory of monotone systems to cope with transmission delays. Adaptation of the predictive control design."

## C-4 Enseignement dispensé

### C-4.1 Activités pédagogiques actuelles

#### 1. SUPELEC (depuis 2005) :

- (a) Première année :
  - TD Signaux et Systèmes 1 (depuis 2005) - total  $\approx 30h$  équivalent TD
  - Étude de laboratoire Signaux et Systèmes 2 (2005-2006) - total  $\approx 30h$  équivalent TD
  - Encadrement de projets de synthèse (depuis 2005) - total  $\approx 35h$  équivalent TD
  - Travaux dirigés d'initiation à la recherche documentaire (2005 - 2008) - total  $\approx 15h$  équivalent TD
- (b) Deuxième année :
  - Cours Méthodes Numériques et Optimisation - voie par apprentissage (depuis 2009) - total  $\approx 20h$  équivalent TD
  - Travaux dirigés Automatique (depuis 2005) - total  $\approx 30h$  équivalent TD
  - Travaux dirigés Analyse Numérique et Optimisation (depuis 2005) - total  $\approx 30h$  équivalent TD
  - Étude de laboratoire Automatique (depuis 2005) - total  $\approx 100h$  équivalent TD
  - Encadrement de projets de conception (depuis 2005) - total  $\approx 35h$  équivalent TD
- (c) Troisième année :
  - Encadrement de Contrats d'Études Industrielles (2007-2008) - total  $\approx 50h$  équivalent TD
  - Encadrement d'Études de Laboratoire "Compléments d'Automatique" en option SE (2007-2009) - total  $\approx 30h$  équivalent TD
- (d) Troisième année - suite à la réforme 2010 :
  - Responsable pédagogique de la mineure "Commande des systèmes hybrides" - 24h (évaluation comprise)  
 Organisation : 19,5h cours (13x 1h30) + 4,5h TD (3x 1h30) + 3h Examen.  
 L'objectif de ce cours est de sensibiliser l'ingénieur à la problématique spécifique des systèmes dynamiques hybrides. Seront traitées les diverses composantes allant de la description mathématique (types de modélisation, outils d'analyse de la stabilité, stratégies de commande) aux aspects méthodologiques (spécification, conception, ...) et les applications industrielles.
  - Participation (à l'heure d'environ 7,5h de cours) dans la mineure "Surveillance, diagnostic et maintenance prédictive des systèmes".
- (e) Formation Continue :
  - CG3 et CG5 - Mise en oeuvre et programmation de la commande prédictive - total  $\approx 10h$  équivalent TD

## 2. Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires

Master M2 (École Polytechnique -INSTN - SUPELEC) "Conception et management des systèmes informatiques complexes"

- intervenant - 50% dans le cours " Systèmes Hybrides " (2008-2009) - total  $\approx 10h$  équivalent TD
- responsable du cours " Systèmes Hybrides " (depuis 2009) - total  $\approx 20h$  équivalent TD

### C-4.2 Activités pédagogiques passées

#### Université "Politehnica" Bucarest (2001-2002)

- Travaux Dirigés et Études de laboratoire sur le cours de "Automatique" (Prof. Ioan Dumitrache) - total  $\approx 25h$  équivalent TD
- Travaux Dirigés et Études de laboratoire sur le cours de "Systèmes automatisés" - Faculté de Mécanique et Faculté de Mécatronique (Prof. Ioan Dumitrache) - total  $\approx 40h$  équivalent TD

#### ESIEA (École Supérieure d'Informatique Électronique Automatique) Paris (2007)

Chargé de cours "Introductions aux systèmes asservis" (100 étudiants)

- Cours magistral (18h)
- Travaux Dirigés (18h)

#### Université Paris-Sud (2003, 2006)

- Encadrement de TER (Travail d'Étude et Recherche) (2003) : "Commande prédictive et les régulateurs RST (Application à la commande d'un réacteur à éthylène)" - total  $\approx 10h$  équivalent TD
- Encadrement de stages Master "Automatique et Traitement du Signal" (2006, 2008)

### C-4.3 Enseignement au niveau doctoral

#### Ecole de JDMACS (2008)

Responsable du Module "Commande prédictive : interaction optimisation - commande"

- Responsable et organisateur du module (15h - 3 intervenants - 25 participants)
- Chargé d'une partie de cours (6h)

#### Université des Sciences Appliquées de Cologne - Fachhochschule Köln (2006)

Chargé du module "Explicit Model Predictive Control. Multiparametric Programming."

- Cours niveau doctoral (12h - 15 participants)

#### C-4.4 Conclusion

Dans le parcours professionnel, les activités d'enseignement suivent une tendance de croissance "saine" dans le sens où le volume horaire ne présente pas de variations importantes sur un intervalle court ni d'inflexions. Généralement elles ont été reconduites sur plusieurs années en permettant donc une pérennisation du support tout en améliorant la forme et en faisant évoluer leur contenu.

Cette tendance est corrélée avec la courbe d'évolution des capacités de synthèse et de communication associées à diverses expériences des métiers liés à l'enseignement.

J'ai ressenti le volet pédagogique de mon activité comme un échange particulièrement enrichissant et formateur par le fait qu'il demande une adaptation d'autant plus intense que je n'ai pas vécu de l'intérieur les particularités des Grandes Écoles et du système français en général pendant ma période de formation.

Au delà de l'enseignement en lui-même, il faut mentionner les multiples facettes allant de l'intégration dans une équipe pédagogique jusqu'à la création des cours ou l'adaptation des outils pédagogiques pour faire évoluer les travaux pratiques en accord avec les nécessités du moment (théoriques et applicatives).

Pour conclure, je suis reconnaissant à mes élèves et à mes collègues pour cette expérience valorisante d'enseignement pour laquelle j'ai des projets importants d'évolution au même titre que pour la recherche.

## C-5 Activité de recherche

Le travail de recherche a commencé en Octobre 2001.

Dans la période Octobre 2001 - Août 2010 la production scientifique se présente comme suit (voir Section C-13) :

- 15 articles de revue avec comité international de lecture (dont 9 comme premier auteur)
- 12 chapitres de livre (dont 5 comme premier auteur)
- plus de 50 articles présentés à des conférences avec comité international de lecture (dont 20 comme premier auteur)

Pour comparer les chiffres avant/après la thèse, il faut mentionner que le travail de thèse soutenue en Septembre 2005 a donné lieu aux publications suivantes (toutes comme premier auteur) :

- 3 articles de revue avec comité international de lecture
- 0 chapitres de livre
- 10 articles présentés à des conférences avec comité international de lecture

La liste de publications se trouve en annexe du CV et des détails concernant les contributions sont présentés dans la partie "Activités de recherche". Une liste des dix sujets (équivalents à des mots clés des publications) autour des quels s'est organisée la recherche durant ces 9 ans est :

- méthodes ensemblistes en automatique
- commande basée sur des techniques d'optimisation
- systèmes hybrides
- commande robuste
- commande tolérante aux défauts
- systèmes à retard
- méthodes numériques en automatique
- stabilité et ensembles invariants
- commande coopérative
- commande distribuée

## C-6 Reconnaissance des résultats de recherche

### 1. Prix Archimedes 2002

Le prix Archimède est une distinction réservée aux étudiants des institutions européennes d'enseignement supérieur. Organisé dans le cadre du programme *Potentiel humain*, le prix visait à promouvoir la recherche européenne et à en améliorer la visibilité, tant en Europe que dans le reste du monde. Il s'agit également d'attirer l'attention du grand public sur les résultats de recherche européens et, ce faisant, de stimuler son intérêt pour la science et la technologie. Le prix Archimède 2002 a été décerné à des étudiants ayant développé des idées ou des concepts scientifiques originaux dans des domaines en rapport avec l'un des six thèmes suivants : structure et fonction des macromolécules ; modélisation et gestion des ressources en eau ; répercussions économiques et sociétales de l'évolution démographique au sein de l'UE ; dispositifs énergétiques ; aquaculture ; répercussions du tourisme sur les écosystèmes naturels et humains.

Pour la thématique : "Water resources modelling and management" le jury a décerné le prix Archimedes au projet :

*Model of hybrid systems for studying water management*

Le texte officiel de présentation du prix Archimède décerné à MUNICH, le 5 décembre 2002, attribué par la Commission Européenne à Sorin OLARU, University "Politehnica", Bucharest, Romania mentionne :

*Sorin's research applied a real world scenario (agricultural water management of three irrigation lakes) to the theoretical field of mixed logical dynamical (MLD) systems. He developed a model for the chosen configuration and adopted predictive techniques for the management strategy.*

2. Bourse postdoctorale *European Research Consortium on Informatics and Mathematics* attribuée en 2005 pour un séjour de 9 mois (en 2006) à NTNU Trondheim. La bourse a été refusée en 2005 suite à l'acceptation de la position permanente d'enseignant-chercheur à SUPELEC.
3. Selection on the Best Papers List - ICINCO 2005  
"A Parameterized Polyhedra Approach for the Explicit Robust Model Predictive Control" par Sorin Olaru and Didier Dumur
4. Best Poster Prize - 5th Asian Control Conference 2004  
"Feasibility of Constrained Generalized Predictive Control within Invariant Sets Framework" par Sorin Olaru et Didier Dumur
5. Bourse de recherche ERASMUS - SUPELEC pour le projet de Master en 2001
6. 1998 *Kvaerner - IMGB Prize* pour les résultats académiques au niveau national.
7. Bourse d'excellence du Ministère de l'Éducation Nationale pour les résultats académiques dans le cursus à Université "Politehnica" Bucarest 1997-2000.



## C-7 Participation à la vie de la communauté scientifique

### C-7.1 Participation à des jurys de thèses

- A Adrian Mark Medioli (Research Academic, ARC Centre for Complex Dynamic Systems and Control)
  - École doctorale : University of Newcastle. Faculty of Engineering and Built Environment, School of Electrical Engineering and Computer Science
  - Thèse : Maximal Controllability via Reduced Complexity Model Predictive Control
  - Encadrants : Maria M. Seron, Rick Middleton
  - Année de la dissertation : 2009
  - Participation en tant que rapporteur
- B Jose Bernardo Mare (Research Academic, ARC Centre for Complex Dynamic Systems and Control)
  - École doctorale : University of Newcastle. Faculty of Engineering and Built Environment, School of Electrical Engineering and Computer Science
  - Thèse : "Constrained tracking and estimation : analytical solutions, symmetry and nonlinear insights"
  - Encadrant : Jose De Dona
  - Année de la dissertation : 2007
  - Participation en tant que rapporteur
- C Hichem Benlaoukli (Département Automatique, SUPELEC)
  - École doctorale : Sciences et Technologies de l'Information des Télécommunications et des Systèmes, Paris Sud XI
  - Thèse : Méthodes géométriques pour la construction des ensembles invariants. Application à la faisabilité des lois de commande prédictive.
  - Directeur de thèse : G. Duc
  - Année de la dissertation : 2009
  - Participation en tant qu'encadrant
- D Khaoula Nagoudi-Layerle (IRSEEM E.A. 4353 )
  - Ecole doctorale : SPMII, Univ. Rouen
  - Thèse : "Synthèse d'un contrôleur prédictif à base d'état pour la commande des systèmes instables à non minimum de phase"
  - Directeur de thèse : Houcine CHAFOUK
  - Encadrant : Nicolas Langlois
  - Année de la dissertation : prévue 2010 - repoussée 2011
  - Participation en tant qu'examinateur (début Novembre)
- E Francesco Scibilia (NTNU Trondheim)
  - Ecole doctorale : NTNU, Trondheim, Norway
  - Thèse : "Enhanced Model Predictive Control"
  - Encadrant : Morten Hovd
  - Année de la dissertation : 2010
  - Invitation reçue fin Octobre 2010

### C-7.2 Animation, groupes de recherche, organisation de colloques, séminaires

- A Animateur (en collaboration avec Ahmed Chemouri, LIRMM) du Groupe de travail "Commande prédictive non-linéaire" depuis Septembre 2007.

#### *Problématique scientifique*

Les travaux de ce GT CPNL faisant partie du groupement de recherche GdR MACS "Modélisation, Analyse et Conduite des Systèmes Dynamiques" du CNRS concernent la méthodologie de synthèse de lois de commande prédictive (à base de modèle) dite aussi commande optimale à horizon fuyant. L'objectif du GT est d'animer, de valoriser et de transférer la méthodologie prédictive au sein de la communauté automatique nationale. En d'autre terme, il s'agit de partager des expériences accumulées, dans des domaines aussi divers que la robotique, le génie des procédés ou l'aéronautique et de montrer à travers des exemples variés et concrets les potentialités de l'approche par horizon glissant. Une importance particulière est accordée aux exemples mettant en oeuvre des systèmes à dynamiques rapides et fortement contraintes.

Parmi les verrous scientifiques, on peut citer : la stabilité du système en boucle fermée avec un critère à horizon fini sans contrainte finale, la caractérisation de la robustesse vis à vis des dynamiques négligées ou des erreurs de modèle, des perturbations inconnues et non mesurées, la formulation sous optimale et résolution en ligne des problèmes d'optimisation avec le choix des techniques d'optimisation, l'implémentation temps-réel sur des structures à dynamiques rapides : robots parallèles d'usinage, robots bipèdes soumis à des contraintes unilatérales, systèmes non linéaires oscillants, ...

#### *Activité et fonctionnement*

Le fonctionnement de ce groupe de travail s'articule autour de l'organisation de réunions scientifiques durant lesquelles des exposés et des séminaires techniques sur des travaux de recherche relevant de la thématique du groupe sont présentés. Le GT se réunit 2 à 3 fois par an avec une présence moyenne aux réunions d'une vingtaine de personnes.

L'activité du GT valorise également la diffusion des résultats au niveau international. Des sessions invitées à CIFA'08 et au 8th IFAC Workshop on Time-delay Systems, TDS'09 ont ainsi été organisées, la publication d'ouvrages de synthèse incluant des contributions des membres du groupe a été coordonnée. Un workshop IFAC a eu lieu à Grenoble en 2006 : IFAC Workshop on Nonlinear Model Predictive Control for Fast Systems.

Les membres du groupe de travail CPNL ont proposé un module de formation doctorale qui s'intitule « Commande prédictive : interaction optimisation - commande », dans le cadre de l'école des JDMACS 2009 à Angers.

#### *Faits marquants et perspectives*

Depuis 2008 (année du début de l'activité d'animation effective), le groupe a fonctionné avec un bon dynamisme. Le contenu scientifique des présentations est varié, dans la mesure où les problématiques abordées concernent différents

aspects de la commande prédictive (robustesse, stabilité, optimisation, etc) aussi bien que les applications (réacteurs chimiques, PVTOL, moteur diesel, robots télé-opérés, technique du bâtiment etc). En 2009 notre Groupe a organisé une réunion en commun avec le GT SDH (Systèmes Dynamiques Hybrides) et en 2010 une autre avec le GT MOSAR qui ont permis d'élargir le spectre de discussions au delà du cadre des réunions régulières. L'ouverture à l'international du groupe est déjà notable à travers ses publications et son implication dans des conférences. Lors des dernières réunions du groupe, des chercheurs provenant de laboratoires étrangers ont participé avec des présentations scientifiques, l'invitation régulière de personnalités étrangères et/ou industrielles pour des présentations « tutoriel » pourra conforter cette ouverture et donner une dimension supplémentaire à notre groupe.

B Membre de groupes de travail :

- Modélisation, Analyse et Conduite des Systèmes dynamiques : MOSAR, SDH, MEA, S3S
- Société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision : POC

### C-7.3 Organisation des sessions dans les congrès internationaux

A Organisation (avec A. Chemori, LIRMM) d'une session invitée : "Commande prédictive et estimation à horizon glissant" pour CIFA 2008

*Courte description : La commande prédictive à base de modèle (MPC) et l'estimation à horizon glissant (MHE) sont de plus en plus utilisées dans la commande des systèmes. En effet, avec l'augmentation des capacités de calculateurs, ces techniques sont, de nos jours, appliquées en temps réel dans le cas d'une grande variété de systèmes et notamment les systèmes rapides.*

*Le but principal de cette session est de mettre en exergue les derniers résultats et d'explorer les pistes théoriques et pratiques dans ce champ thématique. Les communications sur des sujets traitant la théorie MPC/MHE, la construction des modèles de prédiction, les applications ou les défis algorithmiques seront les bienvenues.*

Les contributions :

- "Commande prédictive des systèmes dont l'entrée est affectée par un retard variable" par Hichem Benlaoukli, Sorin Olaru, Silviu-Iulian Niculescu
- "Commande prédictive à base de modèle (MPC) pour le trafic urbain bi-modal" par Neila Bhouiri, Djilali Touazi
- "Commande prédictive à base d'état : implémentation sur le circuit d'air du moteur diesel" par Khaoula Layerle, Nicolas Langlois, Houcine Chafouk
- "Une nouvelle stratégie de commande prédictive des systèmes non linéaires à dynamiques rapides" par Hichem Ben Nasr, Faouzi M'Sahli
- "NCGPC sans contraintes et placement de pôles avec extension dynamique : une étude comparative appliquée au moteur diesel" par Marcelin Dabo, Nicolas Langlois, Houcine Chafouk

B Organisation (avec M. Lazar - TU/e) d'une session invitée à IFAC TDS 2009

Courte description :

*The aim of this Invited Session is to present various new ideas and techniques for setting up suitable models and MPC schemes, able to handle efficiently uncertain time-varying delays, packet dropouts and limited communication bandwidth constraints.*

*Specific model predictive control design procedures are appropriately adapted to some class of delay systems that open interesting perspectives for applications. Each contribution is self-contained and includes new methodological ideas for interpreting, dealing, understanding and using the receding horizon control and estimation in the identification, analysis and synthesis of various classes of interconnection schemes.*

Les contributions :

- "TCP modelling and predictive congestion control", by Rafael Cabral Melo, Jean-Marie Farines and Julio E. Normey-Rico (Federal University of Santa Catarina, Brazil)
- "Invariant sets for a class of linear systems with variable time-delay" by Warodi Lombardi, Sorin Olaru and Silviu Iulian Niculescu (SUPELEC, France)
- "Networked control under time-synchronization errors", by Alexandre Seuret (University of Leicester, UK) and Karl H. Johansson (Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden)
- "Further Results on Stabilization of Linear Systems with Time-varying Delays", by Rob Gielen and Mircea Lazar (Eindhoven University of Technology, The Netherlands)
- "Model Predictive Control for Systems with Time Delay : An Application to Air-Fuel Ratio Control in Automotive Engines", by S. Trimboli (University of Siena, Italy), S. Di Cairano (Ford USA), A. Bemporad (University of Siena, Italy), I.V. Kolmanovsky (Ford USA)
- "Predictive Control for Variable Time Delay in Networked Control Systems", by C. F. Caruntu and Corneliu Lazar ("Gh. Asachi" Technical University of Iasi, Romania)
- "Smoothing techniques for distributed MPC algorithms", by Ion Necoara, Ioan Dumitrache (UPB, Romania), Johan Suykens (KU Leuven, Belgium)
- "Distributed Partially Cooperative NMPC Under Limited Communication and Destabilizing Interconnection", by Mazen Alamir (GIPSA-LAB, France)

C Organisation (avec A. Chemori, LIRMM) d'une session invitée : "Commande prédictive" pour CIFA 2010 avec les contributions :

- "Identification optimale en boucle fermée pour les systèmes non linéaires" par Saida Flila, Pascal Dufour, Hassan Hammouri
- "Commande prédictive robuste des vérins électropneumatiques dans un schéma en cascade position-pression" par Lotfi Chikh, Philippe Poignet, Micaël Michelin, François Pierrot
- "Synchronisation de mouvements sous contraintes pour des systèmes à retard", par Warody Lombardi, Anamaria Luca, Sorin Olaru, Silviu-Iulian Niculescu, Patrick Boucher, Joono Cheong

- "Commande prédictive distribuée pour la régulation thermique des bâtiments" par Petru-Daniel Morosan, Romain Bourdais, Didier Dumur, Jean Buisson
- D Invited speaker - International Conference of Hybrid Systems and Applications - May 22-26, 2006, Lafayette, USA.  
"Predictive control for hybrid systems. How far the polyhedral pre-computations might go?"

Résumé : *The present presentation deals with the predictive control laws for hybrid systems. The modelling formalism used will be the Mixed Logical Dynamical (MLD) which offers the advantage of a compact expression of the dynamics in terms of linear equalities and inequalities on the logical and continuous-time states and inputs. Being an optimization-based control technique, the predictive control needs an efficient implementation scheme in order to be effective in real time. Several studies assess the importance of the prediction horizon and the terminal constraints due to their implications in the structure of the associated optimal control problem. Lately it has been shown that as long as the constraints remain linear, the polyhedral computations can serve as tools for the migration of the on-line computational effort to off-line explicit constructions in terms of explicit solutions which can avoid a costly on-line optimum seeking and thus pushing the application of predictive laws to even higher sampling rates. In the presentation we will review the on-line optimization techniques proposed for the predictive control of hybrid systems based on mixed integer optimization problems. Further, the explicit solutions will be analyzed using a parameterized polyhedra approach.*

#### C-7.4 Participation à des comités, *editorial boards*, organisation de colloques, séminaires, ...

- A Comités internationaux de programme :
  - EUROCON 2007 - "The International Conference on Computer as a Tool", Warsaw, Poland, September 9-12, 2007
  - JDMACS 2009 - "3èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS", Angers, France, mars 17-18, 2009
  - SINTES 2010 - "14th International Conference on System Theory and Control", Sinaia, Roumanie, Octobre 17-19, 2010.
  - 2011 Journées Doctorales MACS, Journées Nationales MACS et Ecole des JDMACS 2011 Marseille, 6-10 Juin 2011.
  - SINTES 2011 - "15th International Conference on System Theory and Control", Sinaia, Roumanie, Octobre, 2011.
- B Recensions :
  - (a) Journaux
    - Automatica
    - IEEE Transactions on Automatic Control
    - International Journal of Control
    - International Journal of Robust and Nonlinear Control
    - Journal of Process Control

- IMA Journal of Mathematical Control and Information
  - International Journal of Innovative Computing, Information and Control
  - Journal of Zhejiang University SCIENCE (A,B)
  - The Open Automation and Control Systems Journal
  - Journal of Control Engineering and Applied Informatics
  - Journal Européen des Systèmes Automatisés
  - Computers & Chemical Engineering - Elsevier
- (b) Conférences
- IEEE Conference on Decision and Control (2004 - 2010)
  - IEEE American Control Conference (2004 - 2011)
  - IFAC World Congress (2005, 2008, 2011)
  - IFAC Nonlinear Model Predictive Control for Fast Systems (2006)
  - European Control Conference (2009)
  - IFAC Time Delay Systems (2009, 2010)
  - IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace (2007)
  - IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (2010)
  - IEEE Multi-Conference on Systems and Control (2004 - 2010)
  - IEEE Eurocon (2009)
  - Conférence Internationale Francophone d'Automatique (2008)
  - Conference on Control Systems and Computer Science (2009)
  - IEEE Africon (2009)
  - 14th International Conference on System Theory and Control (2010)
  - IFAC Necsyst 2010
  - JDMACS 2011
  -

#### **C-7.5 Présidence des sessions à l'occasion des conférences internationales**

- A International Conference of Hybrid Systems and Applications - May 22-26, 2006, Lafayette, USA.
- B 14th Conference on Control Systems and Computer Science, Bucharest Chairman of the "Optimal and Predictive Control" session
- C 5th IEEE Conference on Control and Automation, Budapest Co-Chairman of the "Predictive Control" session
- D 17ème Congrès IMACS, Paris Co-Chairman of the "Predictive and Robust Control" session
- E European Control Conference, Budapest, 2009
- F 8th IFAC Workshop on Time Delay Systems, Sinaia Romania, 2009
- G 21st Chinese Control and Decision Conference, Guilin, June 17-19 2009
- H International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics 2008, Madeira, May 2008
- I 6th IEEE Conference on Control and Automation, Guangzhou, China, May 2007.

### C-7.6 Valorisation

En 2001-2002 j'ai participé à l'INRIA (IRISA Rennes) à l'organisation et au développement de Polylib (une bibliothèque, écrite en langage C, pour le calcul sur les polyèdres convexes). Le noyau de cette librairie est l'algorithme de Chernikova dont la complexité a été sensiblement améliorée par des chercheurs de l'IRISA. Cette librairie est utilisée aujourd'hui par plusieurs équipes de recherche essentiellement pour la parallélisation de programmes, et son utilisation est aussi envisageable pour l'analyse de programmes.

Le but de l'action d'organisation et développement a été de consolider l'implémentation de PolyLib grâce à la mise en place de tests systématiques et complets, l'écriture d'une véritable documentation utilisateur, la mise en place d'une interface conviviale afin de permettre la diffusion élargie de ce logiciel.

Le bilan de cette opération de valorisation se décline donc selon les points suivants :

- Mise en place de sites Web ([www.irisa.fr/polylib](http://www.irisa.fr/polylib)), pour les utilisateurs et pour les développeurs ;
- Écriture d'une documentation utilisateur (disponible à la même adresse) ;
- Mise en place de procédures de test approfondies ;
- Réflexion sur des procédures de test automatique et de gestion des versions du logiciel ;
- Gestion des versions dans le cadre d'un développement multi-sites.

## C-8 Encadrement de travaux de recherche

### C-8.1 Encadrement de thèses soutenues

A Co-encadrement (90%) de la thèse de Hichem Benlaoukli

- Titre : Méthodes géométriques pour la construction des ensembles invariants Application à la faisabilité des lois de commande prédictive
- Directeur de thèse : Gilles DUC
- Début / fin de la formation : Année universitaire 2006 / 2009
- Ecole doctorale : STITS
- Publications : 1 article dans une revue internationale [J1], 2 chapitres de livre [B1,B2], 7 communications dans des conférences internationales [C2,C3,C4,C5,C36,C95,C96].

*Resumé* : La thèse retrace les principes généraux des formulations explicites pour la commande prédictive et souligne la structure linéaire par morceaux de la dynamique.

Les contributions principales de ce travail de thèse résident dans la construction des ensembles invariants pour les systèmes affines par morceaux (PWA). Les résultats se concentrent sur le traitement des systèmes PWA définis sur une partition polyédrale de l'espace d'état même si les principes sont applicables dans un cadre plus général.

Trois constructions remarquables peuvent être mises en évidence :

- la construction expansive,
- la construction contractive,
- la construction basée sur les graphes des transitions.

Au niveau méthodologique toutes ces constructions étant basées sur la dynamique directe ou en temps inverse des ensembles de l'espace d'état, elles impliquent un traitement géométrique au moins dans la partie de comparaison avec le domaine faisable qui peut s'avérer gourmand en temps de calcul. Une solution innovante a été proposée en exploitant l'analyse par intervalles.

La construction des ensembles invariants ouvre la voie au post-traitement des lois de commandes prédictives en vue de la maximisation de leur domaine de fonctionnement avec garantie de sûreté. Des comparaisons sont faites entre les différentes structures MPC avec d'une part les formulations qui bénéficient du renforcement de l'invariance dès la phase de synthèse et d'autre part les formulations explicites qui bénéficient de la post analyse pour la caractérisation des domaines viables.

En outre, le présent travail fait état des extensions MPC à base de ces méthodes géométriques pour le suivi de trajectoire, pour la prise en compte des incertitudes paramétriques ou d'un retard variable à l'entrée du système. Une grande partie de ces développements théoriques sont illustrés par des exemples au fur et à mesure de leur introduction. Le mémoire contient aussi l'étude d'un problème de suivi de trajectoire et de faisabilité/viabilité d'un certain profil, avec application pour la production d'électricité en conjonction avec la caractérisation d'une vallée hydraulique.



## C-8.2 Encadrement de thèses en cours

### A Directeur de thèse de Warody LOMBARDI (par dérogation du CS de Paris XI - 2008)

- Titre : Prédiction et retards dans des environnements complexes
- Co-encadrant : S.I. Niculescu (50%)
- Début / fin de financement : Année universitaire 2008 / 2011
- École doctorale : STITS
- Publications : 5 communications dans des conférences internationales [C12, C13, C14, C15, C16].

### B Co-encadrement (80%) de la thèse de Florin STOICAN

- Titre : Commande tolérante aux défauts se basant sur la théorie de la viabilité et des méthodes ensemblistes
- Directeur de thèse : D. Dumur
- Début / fin de financement : Année universitaire 2008 / 2011
- École doctorale : STITS
- Publications : 7 communications dans des conférences internationales [C35, C46, C47, C48, C49, C50, C51].

### C Co-encadrement (70%) de la thèse de Nam NGUYEN

- Titre : Synthèse prédictive de lois de commande hybrides de type « patchy » pour les systèmes complexes
- Directeur de thèse : D. Dumur
- Début / fin de financement : Année universitaire 2009 / 2012
- École doctorale : STITS
- Publications : 2 communications dans des conférences internationales [C17, C18].

### D Co-encadrement (50%) de la thèse de Ionela PRODAN

- Titre : Systèmes dynamiques coopératifs avec contraintes de communication et limites de viabilité
- Directeur de thèse : P. Boucher
- Début / fin de la formation : Année universitaire 2009 / 2012
- École doctorale : STITS
- Publications : 2 communications dans des conférences internationales [C37, C38].

### E Co-encadrement (10%) de la thèse de Bogdan LIACU

- Titre : Systèmes dynamiques coopératifs avec contraintes de communication et limites de viabilité
- Directeur de thèse : S. Niculescu (collaboration avec LSS et CEA)
- Début / fin de la formation : Année universitaire 2009 / 2012
- École doctorale : STITS
- Publications : 2 communications dans des conférences internationales [C10, C11].

### C-8.3 Encadrement au niveau postdoctoral

- A Co-encadrement (50%) du travail postdoctoral de recherche de Paola FALUGI
- Titre : Commande prédictive robuste multi-modèle
  - Co-encadrant : D. Dumur
  - Début / fin de la formation : Année universitaire 2007 / 2009
  - Publications : 2 articles dans des revues internationales [J2, J3], 2 communications dans des conférences internationales [C7, C8].

### C-8.4 Encadrement de stages de master

- A Co-encadrement (50%) Simona DOBRE
- Master : SUPELEC
  - Titre : Commande prédictive. Formulations explicites dans le cas non-linéaire.
  - Co-encadrant : D. Dumur
  - Début / fin de la formation : Année universitaire 2006 / 2007
  - Publications : 1 chapitre de livre [B8], 1 communication conférence internationale [C6].
- B Co-encadrement (75%) Andreas ULBIG
- Master : SUPELEC
  - Titre : Commande prédictive pour les systèmes PWA. Formulations explicites.
  - Co-encadrant : D. Dumur
  - Début / fin de la formation : Année universitaire 2006 / 2007
  - Publications : 1 article dans une revue internationale [J18], 2 communications dans des conférences internationales [C57, C58].
- C Encadrement du stage de recherche M2R de Rob GIELEN
- Master : Technical University of Eindhoven
  - Titre : Modèles polytopiques pour les systèmes affectés par retard variable en entrée
  - Encadrant TU/e : M. Lazar
  - Stage à SUPELEC pour 3 mois : Janvier - Avril 2008
  - Publications : 1 article dans une revue internationale [J4], 1 communications dans une conférence internationale [B3].

### C-8.5 Encadrement de projets de fin d'études - niveau BAC+5

- A Encadrement du stage de fin d'études Simona DOBRE
- Université "Politehnica" Bucarest
  - Durée : 4 mois (Avril - Juillet 2006)
- B Encadrement (50%) du stage de fin d'études - Madalina DOBRE
- Université "Politehnica" Bucarest
  - Durée : 4 mois (Avril - Juillet 2009)

- C Encadrement (50%) du stage de fin d'études - Anamaria LUCA
  - Université "Politehnica" Bucarest
  - Durée : 4 mois (Avril - Juillet 2009)
  - Publications : 1 contribution lors d'un workshop international
- D Encadrement du stage de fin d'études - Florin STOICAN
  - Université "Politehnica" Bucarest
  - Durée : 4 mois (Avril - Juillet 2009)
  - Publications : 1 communication dans une conférence internationale
- E Encadrement (50%) du stage de fin d'études Catalin-Florentin RADUINEA
  - Université "Politehnica" Bucarest
  - Durée : 3 mois (Avril - Juin 2010)

#### C-8.6 Encadrement de stages

- A Fajar SURWAYAN
  - PhD student, University of Newcastle
  - Stage de recherche de 2 mois (Décembre 2008 - Mars 2009)
  - Sujet : *Polynomial methods and spline tools for flatness-based motion planning of constrained nonlinear systems*
- B Zhang ZIQIANG
  - Etudiant deuxième année, National University of Singapore
  - Stage de recherche de 2 mois (Mai 2009 - Juillet 2009)
  - Sujet : *Prediction based feedback control for systems with time-delays*
- C QiuYun WANG
  - Etudiant deuxième année, Huazhong University of Science and Technology, China
  - Stage de recherche de 2 mois (Octobre 2009 - Décembre 2009)
  - Sujet : *Prediction based feedback control for synchronisation systems*

#### C-8.7 Encadrement de contrats d'études industrielles (Supélec, 3ème année)

- A Schlumberger
  - Etudiants : Samir EL AKOUM, Kamal NASSER-EDDINE
  - Année universitaire : 2006-2007
  - Sujet : *Optimization of the anchoring mechanism of a novel steerable drilling system*
- B EDF
  - Etudiants : Jonathan BARCAT, Nazim BENOTMANE, Olivier LESZCZYNSKI
  - Année universitaire : 2008-2009
  - Sujet : *Détermination du domaine de viabilité des offres d'ajustement en infra-journalier pour une vallée hydraulique*

## C-9 Collaborations scientifiques

### C-9.1 Equipe INRIA - CNRS - SUPELEC

A partir du 1er janvier 2010, l'équipe DISCO a été créée avec une participation SUPELEC (Sorin Olaru et Guillaume Sandou). Ce projet a comme but d'une part de mieux comprendre et de bien formaliser les effets induits par des environnements complexes sur les dynamiques des interconnexions, d'autre part de développer des méthodes et des outils pour l'analyse et la commande de tels systèmes.

Il est bien connu que l'*interconnexion* (ou la mise en relation) de *systèmes dynamiques* a comme conséquence une complexité accrue du comportement du "système global" en présence ou non de boucles de commande ou de rétroaction. D'une manière simplifiée, si la notion de dynamique est sans ambiguïté, les interconnexions apparaissent comme l'association, par connexion matérielle ou informationnelle, de systèmes distincts pour assurer une mise en commun des ressources dans le but d'obtenir un fonctionnement meilleur avec la contrainte de continuité du service en cas de défaut. L'*environnement* peut être vu comme un ensemble d'éléments, structures ou systèmes, naturels ou artificiels constituant le voisinage d'un système donné.

Le développement de jeux interactifs à travers les réseaux de communication, les commandes à distance (opérations chirurgicales à distance par exemple) ou en environnement hostile (robots, drones, etc) ainsi que la tendance actuelle d'intégration à grande échelle de systèmes d'information et de décision ouverts avec des systèmes de production et/ou de transport et/ou de distribution font évoluer les modélisations classiques d'interconnexions en modélisations où la dynamique de l'environnement est à prendre en compte.

**Le projet se construit autour des mots-clés *dynamique, interconnection, environnement, commande* et les axes de recherche proposés sont :**

#### 1. Modélisation de l'environnement

L'idée est de modéliser ici des phénomènes tels qu'une perte de connexion temporaire, un environnement non homogène ou la présence du facteur humain dans la boucle de décision mais également les problèmes liés aux contraintes technologiques (domaine de définition des capteurs par exemple). Les modèles mathématiques en jeu comprennent des équations intégrodifférentielles, des équations aux dérivées partielles, des inéquations algébriques.

#### 2. Contrôle robuste de systèmes interconnectés

Les questions majeures considérées sont celles de la caractérisation de la stabilité et la détermination de familles de (ou mieux, la paramétrisation de l'ensemble des) contrôleurs stabilisants de systèmes dynamiques interconnectés. Dans de nombreuses situations, les dynamiques des interconnexions peuvent être modélisées par des systèmes à retards (constants, distribués ou variables), éventuellement fractionnaires. Notre expertise de ce sujet, aussi bien dans les domaines temporels que fréquentiels, permet de cibler

des cas réputés difficiles comme celui par exemple de systèmes avec infinité de pôles instables.

### 3. Synthèse de contrôleurs à complexité réduite

La question de la synthèse de lois de commande à complexité donnée n'est pas nouvelle et n'est pourtant toujours pas résolue, même dans le cas linéaire de dimension finie.

Notre propos ici est la recherche de familles de contrôleurs "simples" (*ie* de petite dimension) pour des systèmes dynamiques de dimension infinie. L'approche envisagée passe par le recours à des outils de calcul formel. Des méthodes de calcul formel pour l'automatique pourront être développées dans ce cadre.

À l'analyse mathématique des problèmes soulevés dans chacun des trois axes s'ajouteront l'élaboration de méthodes numériques en vue de l'implémentation de nos résultats.

Les applications majeures que nous continuerons à développer dans le projet sont :

- la modélisation de la leucémie myéloïde chronique (collaboration de C. Bonnet avec les projets BANG et ANUBIS),
- le contrôle de processus cryogéniques à l'hélium (collaboration de S. Niculescu et B. Bradu avec le CERN).

D'autres applications dans des domaines tels que la synchronisation de mouvement en environnements virtuels à travers un réseau de communication en présence d'interfaces haptiques seront développées.

Le projet aura des liens forts avec les projets BANG, ANUBIS, SALSA, APICS, ALIEN et METALAU. Des problématiques voisines des nôtres sont considérées dans CORIDA à travers le contrôle d'EDP ou dans NECS à travers la commande en réseaux. Il n'existe cependant aucune redondance : les questions (de contrôlabilité par exemple) aussi bien que les outils (temporels pour les EDP) considérés par CORIDA sont distincts des nôtres, NECS est centré sur l'aspect embarqué.

A Supélec, notre projet va pouvoir lier des collaborations avec les groupes de "Commande de systèmes complexes", "Commande robuste" et "Commande prédictive" du Département Automatique et interagira avec les chercheurs du département Énergie sur les problèmes de type "Smart GRID" par exemple où les problématiques des systèmes dynamiques interconnectés retrouvent un de leurs domaines d'application de prédilection par les caractéristiques intrinsèquement complexes de l'environnement technico-social dans lequel ils sont définis.

En développant des méthodes d'analyse et de contrôle robuste pour des interconnexions de systèmes dynamiques en prenant en compte la modélisation de l'environnement, DISCO vient compléter l'expertise de l'INRIA dans un domaine où les problèmes méthodologiques sont difficiles et les applications qui les engendrent ne cessent de croître.

### C-9.2 Programmes d'échanges, réseaux internationaux

Les collaborations menées dans des programmes d'échange ont utilisé le cadre offert par les partenariats Hubert Curien (PHC) qui sont mis en oeuvre en France par les ministères des Affaires étrangères et européennes (MAEE) et de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (MESR). S'agissant des programmes bilatéraux, dans le pays partenaire, les organismes gérants sont les conseils recherche ou le Ministère de la Science, de la Technologie et du Développement.

#### A PHC PAVLE SAVIC (Serbie) 2008-2009

- Titre : Commande des systèmes en réseau
- Position : Chef de projet
- Correspondant : Professeur MARINKOVIC Slavica
- Objectif scientifique et/ou technologique de la collaboration : Le projet considère les problèmes de commande en boucle fermée (rétroaction impliquant des capteurs et des actionneurs distribués) dans les environnements affectés par les retards de transmission, le bruit et les contraintes de communication. Il a comme objectif le développement des techniques de traitement des signaux de communication appropriés aux systèmes de commande gérés en réseau. Un des soucis principaux sera l'intégration des derniers dispositifs de communication sans fil et leurs implications sur la tolérance aux défauts. Un intérêt spécial sera accordé aux performances de fonctionnement en circuit fermé (stabilité, optimalité). Du point de vue technologique, on vise la conception d'algorithmes de commande robustes et efficaces (de basse complexité) pour réaliser la communication des signaux de commande en réseau.
- Participants : S. Olaru, P. Rodriguez, B. Marinkovic, M. Nesic, F. Stoican, W. Lombardi, A. Luca, S. Marinkovic.

#### B PHC AURORA (Norvege) 2008-2009

- Titre : Commande et estimation avec contraintes, basée sur l'optimisation à horizon glissant
- Position : Chef de projet
- Correspondant : Professeur Morten HOVD
- Objectif scientifique et/ou technologique de la collaboration : Dans sa représentation la plus générale, un système est défini comme un ensemble de composants interdépendants formant une entité, dont l'objectif est d'accomplir un jeu de fonctions spécifiques par l'interaction des éléments le constituant. L'objectif de ce projet est d'explorer les connexions entre deux problèmes importants dans la théorie des systèmes et de ses applications ; à savoir, la commande et l'estimation en présence de contraintes. Presque chaque application impose des contraintes ; les forces (ou les grandeurs équivalentes) que peuvent appliquer les actionneurs sont naturellement limités, les états du système sont prévus avec des limites de sûreté comme c'est le cas pour la température, la pression ou la vitesse. Cependant, la recherche de l'efficacité maximale entraîne souvent des modes d'opération proches de la frontière de l'ensemble des états autorisés. Les relations entre

la commande et l'estimation présentent un intérêt particulier en présence de telles contraintes et l'utilisation de la commande/estimation à horizon glissant sera étudiée dans le présent projet avec une attention particulière pour les problèmes de faisabilité et de robustesse. Plusieurs problèmes associés à la conception des lois de commande MPC (Model Predictive Control) seront abordés dans ce projet, incluant : (i) La description des problèmes pour lesquels la commande et l'estimation ne peuvent pas être manipulées indépendamment ; (ii) L'analyse des avantages/désavantages des différentes méthodes d'estimation (Unscented Kalman Filter, Extended Kalman Filter, particle filtering, etc.) en liaison avec MPC ; (iii) La synthèse des lois de commande adaptative-prédictive ; (iv) L'analyse de la stabilité et des performances des structures de commande résultantes. Le projet contribuera à la recherche dans ce domaine en combinant la commande et l'estimation dans un problème d'optimisation simple. Les derniers avancements en ce qui concerne la construction des ensembles invariants et la programmation multiparamétrique seront utilisés afin de diminuer le conservatisme et de fournir des lois de commande efficaces en temps réel.

- Participants : S. Olaru, F. Scibilia, G. Marafioti, P. Rodriguez, C. Stoica, H. Benlaoukli.

#### C PHC BRANCUSI (Roumanie) 2009-2010

- Titre : Commande prédictive coopérative des systèmes complexes. Modélisation et gestion d'énergie pour le bâtiment intelligent.
- Position : Chef de projet
- Corespondant : Professeur Vladimir RASVAN
- Objectif scientifique et/ou technologique de la collaboration : Les économies d'énergie dans les bâtiments intelligents sont devenues un enjeu fondamental. L'Union Européenne vise ainsi une diminution des consommations d'énergie liées au chauffage de 22% en 2010. S'il est clair qu'une partie de ces économies peut venir de l'amélioration des techniques actuelles de construction ou des matériaux utilisés dans les bâtiments, de formidables réductions peuvent être obtenues par un pilotage optimal des installations existantes. Ainsi, une économie substantielle pourrait être obtenue par une politique efficace de choix entre les différentes sources d'énergie disponibles. A titre d'exemple, la consommation d'énergie nécessaire à l'air conditionné représente environ 10% de la consommation d'énergie totale. Cependant, résoudre de tels problèmes d'optimisation et de commande est une tâche éminemment délicate pour des systèmes aussi complexes. Du point de vue des fonctionnalités et de la modélisation, les bâtiments intelligents sont constitués de nombreux sous-systèmes interconnectés. Chaque sous-système possède ses propres caractéristiques dynamiques, conduisant à des systèmes hybrides, multi-technologiques et multi échelles. De plus, l'interconnexion de ces systèmes entraîne de nouveaux problèmes. La propagation des informations entre des systèmes numériques de périodes différentes et délocalisés conduit à des retards de

propagation non négligeables, incertains et fluctuants dans le temps, dont l'influence doit être étudiée de manière fine pour la stabilité du système global. Le transport de matière, comme l'air, induit des phénomènes complexes pour lesquels une approche classique (Navier-Stokes) implique des temps de calcul incompatibles avec le contrôle temps-réel. Nous associerons donc à ce type de sous-systèmes des modèles simplifiés, réduits au retard physique et à l'atténuation associée au transport.

Du point de vue de l'optimisation et de la commande, le pilotage de tels systèmes se heurte à plusieurs difficultés théoriques. Tout d'abord, ces systèmes sont des systèmes hybrides de grande dimension, puisque les réseaux multi-énergies induisent des variables de commutation entre les sources d'énergie et l'utilisation de plusieurs composants. De plus, de nombreuses contraintes économiques, techniques et environnementales doivent être simultanément satisfaites, ce qui limite le domaine de fonctionnement admissible. La possibilité d'un contrôle décentralisé doit également être prise en compte pour tirer avantage de cette structure de commande souple.

En conclusion, l'étude des bâtiments intelligents apparaît comme une nécessité, notamment pour la diminution de la consommation globale d'énergie. C'est également un formidable défi pour l'Automatique car les problèmes à étudier sont ceux des systèmes hybrides incertains, avec des aspects multi-technologiques et multi-dynamiques. Dans un tel contexte, l'utilisation de la commande prédictive apparaît comme un candidat intéressant pour l'extension des résultats d'optimisation dans une structure de contrôle en boucle fermée.

- Participants : S. Olaru, V. Rasvan, S. Niculescu, G. Sandou, P. Rodriguez, E. Witrant, D. Popescu, C. Lazar.

#### D PHC VAN GOGH (Pays Bas) 2009-2010

- Titre : Modélisation et commande des systèmes en réseau
- Position : Chef de projet
- Correspondant : Professeur Mircea Lazar
- Objectif scientifique et/ou technologique de la collaboration : Ce projet conjoint TU/e-SUPELEC est dédié à l'implémentation de lois de commande rapides pour des systèmes en réseau. Par comparaison avec l'Automatique classique, qui suppose l'existence d'une liaison "parfaite" entre le bloc de décision et le processus, la commande en réseau impose des défis tels que : la robustesse face à des retards induits (une loi de commande stabilisante peut rendre instable un système en boucle fermée en présence d'un retard variable) et la robustesse face à la perte de paquets d'information et/ou capacité de communication réduite (information partielle sur l'état/sortie et mesures pouvant ne pas être disponibles à chaque pas d'échantillonnage à cause des pertes de paquets). Ces problèmes sont d'une importance toute particulière pour les sujets traités dans la proposition VENI "Flexible Lyapunov functions for real-time control", pour laquelle la commande et l'estimation à travers le réseau joue un rôle important



dans le cadre des deux applications considérées : systèmes de puissance et réseaux d'estimation des chaussées intelligentes.

La collaboration TU/e-SUPELEC se concentrera sur le développement de nouvelles techniques de modélisation à temps discret pour les systèmes en réseau (NCS) affectés par des retards variables et des pertes de paquets. L'objectif est l'obtention d'un modèle assez général pouvant s'appliquer à une large gamme de phénomènes rencontrés au sein des systèmes en réseau et n'étant pas trop conservatif ou complexe pour permettre son utilisation lors de la phase de synthèse de la commande. De tels résultats s'avèrent nécessaires car les modèles existants ne peuvent pas être utilisés directement par les méthodes de synthèse à temps continu. Des méthodes se basant sur l'approximation des non-linéarités par des modèles polytopiques, ainsi que des outils nouveaux utilisés pour l'obtention de conditions nécessaires pour la stabilité par morceaux des systèmes décrits par des matrices ayant des coefficients définis par des intervalles, seront explorés pour atteindre les objectifs fixés. Un compromis optimal devra être trouvé entre la complexité et la mise à l'échelle des modèles de systèmes en réseau d'une part et la qualité des approximations d'autre part.

– Participants : S. Oлару, M. Lazar, W. Lombardi, N. Nguyen, R. Gilien.

#### E PHC IMOTHEP (Egypt) 2007-2008

– Titre : Commande robuste des systèmes hybrides incertains

– Position : jeune chercheur

– Chef de projet égyptien : Professeur Jean THOMAS

– Chef de projet français : Professeur Didier Dumur

– Objectif scientifique et/ou technologique de la collaboration : The scientific objectives of the proposed project aim at elaborating robust control strategies for hybrid systems, integrating reduction of complexity methodologies, resulting in an effective implementation within a real time environment. The proposed methodology should lead to innovative control structures for hybrid systems, taking into account robustness towards uncertainties. The innovative aspect will be mainly due to the definition of explicit solutions through polyhedral description framework, decreasing the on-line computational load.

– Participants : D. Dumur, J. Thomas, S. Oлару, P. Boucher, R. Mostafa, H.W. Gomma, J. Buisson.

## C-10 Management de projet

- A PHC PAVLE SAVIC (Serbie) - mobilité
- Organisme financier : Ministère des Affaires étrangères avec le soutien du ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (EGIDE)
  - Position : Chef de projet
  - Durée : 2 ans (2008-2009)
  - Budget :  $2 \times 4470$
- B PHC AURORA (Norvège) - mobilité
- Organisme financier : Ministère des Affaires étrangères avec le soutien du ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (EGIDE)
  - Position : Chef de projet
  - Durée : 2 ans (2008-2009)
  - Budget : 2500 +3000
- C PHC BRANCUSI (Roumanie) - mobilité
- Organisme financier : Ministère des Affaires étrangères avec le soutien du ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (EGIDE)
  - Position : Chef de projet
  - Durée : 2 ans (2009-2010)
  - Budget : 2960 +3730
- D Projet de recherche PHC VAN GOGH (Pays Bas) - mobilité
- Organisme financier : Ministère des Affaires étrangères avec le soutien du ministère de l'Education nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (EGIDE)
  - Position : Chef de projet
  - Durée : 2 ans (2009-2010)
  - Budget : 3000 +3000
- E Projet Européen FP5 - "Water resources modelling and management" - (en relation avec le Prix Archimedes décerné en 2002)
- Organisme financier : Commission Européenne
  - Position : Chef de projet
  - Durée : 3 ans (2002-2005)
  - Budget : 34000
  - Thème : Hybrid systems (<http://europa.eu.int/comm/research/press/2002>)
- F Projet de recherche - "Viability and predictive control"
- Organisme financier : la région "Ile de France"
  - Position : Chef de projet
  - Durée : 3 ans (2006-2009)
  - Budget : 110k
  - Sujet : Commande prédictive
- G Projet de recherche - "Prediction and delays in complex environments"

- Organisme financier : Fondation SUPELEC
  - Position : Chef de projet (conjointement avec S. Niculescu LSS-CNRS-SUPELEC)
  - Durée : 3 ans (2008-2011)
  - Budget : 120k
  - Sujet : Commande prédictive, systèmes à retard
- H Projet de recherche - "Patchy predictive control for hybrid systems"
- Organisme financier : Fondation SUPELEC
  - Position : Chef de projet
  - Durée : 3 ans (2009-2012)
  - Budget : 120k
  - Sujet : Commande prédictive, systèmes hybrides
- I Projet de recherche - "Fault tolerant control based on set theoretic methods and viability theory"
- Organisme financier : Institut C3S Carnot
  - Position : Chef de projet
  - Durée : 3 ans (2008-2011)
  - Budget : 130k
  - Sujet : Diagnose, méthodes ensemblistes en automatique
- J Projet de recherche - "Systèmes dynamiques coopératifs avec contraintes de communication et limites de viabilité"
- Organisme financier : Fondation EADS
  - Position : Chef de projet
  - Durée : 3 ans (2010-2013)
  - Budget : 150k
  - Sujet : Systèmes coopératifs, systèmes dynamiques sous contraintes

## C-11 Gestion de carrière académique, politique de la recherche

- A A l'invitation du Directorate de la Recherche de la Commission Européenne j'ai participé le 9 et 10 Septembre 2004 à la conférence ENWISE (*Enlarging Europe with/for women scientists*) à Tallinn, notamment au deux forums suivantes :
  - "Networking and employment discrimination and practices" - Young scientists' forum
  - "Building a gender perspective in science : impact on the research community"
- B Participation à la 54ème rencontre avec les lauréats du Prix Nobel à Lindau, en Allemagne. Cette manifestation a lieu à un rythme annuel et l'édition 2004 a été dédiée à la Physique. Pendant la période June 27 -July 2, 2004 à Lindau j'ai eu l'occasion de rencontrer quelques figures illustres du monde scientifique.
- C Participation aux "Séminaires d'entrée à SUPELEC" qui ont comme objectif de familiariser les élèves au monde industriel et à celui de la recherche pour fixer des repères pour la carrière.
- D J'ai été nommé par la direction de SUPELEC dans une commission dont le but est de proposer un document de travail pour les changements futurs au niveau de la *gestion prévisionnelle des carrières et des compétences* (GP2C).
- E J'ai suivi un stage "ISO 9001 et le système de management de la qualité de la formation continue " qui m'a permis d'acquérir des connaissances sur le management de qualités spécifiques pour l'activité de formation continue.

**C-12 Autres aspects liés au profil d’enseignant-chercheur****C-12.1 Langues**

- Anglais : très bon niveau
- Français : très bon niveau
- Roumain : langue maternelle

**C-12.2 Membre de sociétés savantes**

- IEEE - Institute of Electrical and Electronics Engineer
- SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics
- EECI - European Embedded Control Institute
- SRAIT - la section Roumaine d’ IFAC (International Federation of Automatic Control)

## C-13 Publications

### Articles dans des revues internationales avec comité de lecture

- J1. H. Benlaoukli, M. Hovd, and S. Olaru. Geometrical characterization of robust predictive control strategies. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 10(4) :13–19, 2008.
- J2. P. Falugi, S. Olaru, and D. Dumur. Multi-model predictive control based on LMI. From the adaptation of the state-space model to the analytic description of the control law. *International Journal of Control*, 83(8) :1548–1563, 2010.
- J3. P. Falugi, S. Olaru, and D. Dumur. Robust multi-model predictive control using LMIs. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 8(1) :169–175, 2010.
- J4. R.H. Gielen, S. Olaru, M. Lazar, W.P.M.H. Heemels, N. van de Wouw, and S.-I. Niculescu. On polytopic inclusions as a modeling framework for systems with time-varying delays. *Automatica*, 46(3) :615 – 619, 2010.
- J5. Morten Hovd and Sorin Olaru. Piecewise quadratic Lyapunov functions for stability verification of approximate explicit MPC. *Modeling, Identification and Control*, 31(2) :45–53, 2010.
- J6. S. Olaru, J. A. De Dona, M. M. Seron, and F. Stoican. Positive invariant sets for fault tolerant multisensor control schemes. *International Journal of Control*, 83(12) :2622 – 2640, 2010.
- J7. S. Olaru and D. Dumur. Avoiding constraints redundancy in predictive control optimization routines. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(9) :1459–1466, 2005.
- J8. S. Olaru and D. Dumur. Constrained predictive control for position tracking of an induction motor. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 7(3) :40–47, 2005.
- J9. S. Olaru and D. Dumur. Feasibility of constrained generalized predictive control within invariant sets framework. *Australian Journal of Electrical and Electronics Engineering*, 2(1), 2005.
- J10. S. Olaru and D. Dumur. Compact Explicit MPC Law with Guarantees of Feasibility for Reference Tracking. *Nonlinear dynamics and systems theory*, 7(4) :379–398, 2007.
- J11. S. Olaru, D. Dumur, and I. Dumitrache. Continuity of control laws based on multiparametric linear programs. *International Journal of Tomography and Statistics*, 5(W07) :50–55, 2006.
- J12. S. Olaru, J. Thomas, D. Dumur, and J. Buisson. Genetic Algorithm based Model Predictive Control for Hybrid Systems under a Modified MLD Form. *International Journal of Hybrid Systems*, 4(1-2) :113–132, 2004.
- J13. Sorin Olaru, Didier Dumur, and I. Dumitrache. On the feasibility of constrained generalized predictive control. *University Politehnica Bucharest Scientific Bulletin*, 72(4) :65 – 76, 2010.
- J14. Sorin Olaru, Didier Dumur, Jean Thomas, and Marius Zainea. Predictive control for hybrid systems. implications of polyhedral pre-computations. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 2(2) :510–531, 2008.

- J15. Ionela Prodan, Sorin Olaru, Cristina Stoica, and Silviu Niculescu. Path Following with Collision Avoidance and Velocity Constraints for Multi-Agent Systems. *Annals of the University of Craiova. Series : Automation, Computers, Electronics and Mechatronics.*, 7(2) :33 – 38, 2010.
- J16. Pedro Rodriguez Ayerbe and Sorin Olaru. Youla-Kucera parameter in explicit control laws. *Annals of the University of Craiova. Series : Automation, Computers, Electronics and Mechatronics.*, 7(2) :44 – 52, 2010.
- J17. F. Scibilia, S. Olaru, and M. Hovd. On feasible sets for MPC and their approximations. *Automatica*, 47(1) :133 – 139, 2011.
- J18. A. Ulbig, S. Olaru, D. Dumur, and P. Boucher. Explicit nonlinear predictive control for a magnetic levitation system. *Asian Journal of Control*, 12(3) :434–442, 2010.
- J19. E. Witrant, A. D’Innocenzo, G. Sandou, F. Santucci, M.D. Di Benedetto, A.J. Isaksson, K.H. Johansson, S.I. Niculescu, S. Olaru, E. Serra, et al. Wireless ventilation control for large-scale systems : The mining industrial case. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(2) :226–251, 2010.

## Livres ou chapitres de livres

- B1. H. Benlaoukli, S. Olaru, S.-I. Niculescu, and S. Marinkovic. Commande prédictive des systèmes dont l’entrée est affectée par un retard variable. In M. Benrejeb P. Borne, F. Filip and D. Popescu, editors, *Automatique Avancee et Informatique Appliquee*, pages 55–61. Editura Academiei Romane, 2009.
- B2. Hichem Benlaoukli and Sorin Olaru. Model predictive control - numerical methods for the invariant sets approximation. In Svetozar Margenov, Lubin G. Vulkov, and Jerzy Wasniewski, editors, *Numerical Analysis and Its Applications*, volume 5434 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 192–199. Springer, 2008.
- B3. R. Gielen, S. Olaru, and M. Lazar. On polytopic approximations of systems with time-varying input delays. In *Nonlinear Model Predictive Control*, pages 225–233. Springer, 2009.
- B4. W.P.M.H. Heemels, N. van de Wouw, R.H. Gielen, MCF Donkers, L. Hetel, S. Olaru, M. Lazar, J. Daafouz, and S. Niculescu. Comparison of overapproximation methods for stability analysis of networked control systems. In *Proceedings of the 13th ACM international conference on Hybrid systems : computation and control*, pages 181–190. ACM, 2010.
- B5. G. Marafioti, S. Olaru, and M. Hovd. State Estimation in Nonlinear Model Predictive Control, Unscented Kalman Filter Advantages. In *Nonlinear Model Predictive Control*, pages 305–313. Springer, 2008.
- B6. S. Olaru and D. Dumur. Commande prédictive sous contraintes. Edition Hermès, 2006.
- B7. S. Olaru and D. Dumur. A parameterized polyhedra approach for the explicit Robust Model Predictive Control. In *Informatics in Control, Automation and Robotics II*, pages 217–226. Springer, 2007.
- B8. S. Olaru, D. Dumur, and S. Dobre. On the geometry of predictive control with nonlinear constraints. In *Informatics in Control, Automation and Robotics*, Lecture Notes in Electrical Engineering, pages 301–314. Springer, 2009.

- B9. S. Olaru and G. Sandou. Nonlinear predictive control : structure, computational challenges, stochastic optimization algorithms. In *New Research on Nonlinear Analysis*, pages 157–208. Nova Science Publishers, 2008.
- B10. Sorin Olaru, Ioan Dumitrache, and Didier Dumur. Geometrical analysis of model predictive control : A parameterized polyhedra approach. In Svetozar Margenov, Lubin G. Vulkov, and Jerzy Wasniewski, editors, *Numerical Analysis and Its Applications*, volume 5434 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 439–446. Springer, 2008.
- B11. G. Sandou and S. Olaru. Ant colony and genetic algorithm for constrained predictive control of power systems. In *Lecture Notes in Computer Science*, volume 4416, pages 501–514. Springer, 2007.
- B12. G. Sandou and S. Olaru. Particle swarm optimization based nm-pc : An application to district heating networks. In *Nonlinear Model Predictive Control, Springer LNCIS*, volume 384 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 551–559, 2009.

### Articles dans des conférences internationales avec comité de lecture

- C1. J. Akre, J. Juillard, S. Olaru, Galayco D., and Colinet E. Determination of the behaviour of self-sampled digital phase-locked loops. In *53rd IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 2010.
- C2. H. Benlaoukli, M. Hovd, S. Olaru, and P. Boucher. Invariant sets for pwa systems using transition graph. In *7th IEEE International Conference on Control and Automation ICCA*, Nouvelle Zélande, Décembre 2009.
- C3. H. Benlaoukli and S. Olaru. On the computation and bounding of invariant sets. In *International Conference on Control, Automation and Systems ICCAS*, Seoul, Korea, 2007.
- C4. H. Benlaoukli and S. Olaru. Computation and bounding of robust invariant sets for uncertain systems. In *Proceedings of the IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- C5. H. Benlaoukli and S. Olaru. Feasible tracking reference set computation using the principle of invariant set construction. In *7th IEEE International Conference on Control and Automation ICCA*, Nouvelle Zélande, Décembre 2009.
- C6. S. Dobre, S. Olaru, and D. Dumur. Explicit predictive control laws with a nonlinear constraints handling mechanism. In *EUROCON 2007, Warsaw, Poland*, 2007.
- C7. P. Falugi, S. Olaru, and D. Dumur. Explicit robust multi-model predictive control using lmis. In 16th Mediteranean control conference, 2008.
- C8. P. Falugi, S. Olaru, and D. Dumur. Robust multi-model predictive control using lmis. In 17th IFAC World Congress, 2008.
- C9. M. Hovd, F. Scibilia, J. Maciejowski, and S. Olaru. Verifying stability of approximate explicit MPC. In *Proceedings of the the IEEE Control and Decision Conference, Shanghai, China*, 2009.
- C10. B. Liacu, C. Mendez-Barrios, S.-I. Niculescu, and S. Olaru. Some Remarks on the Fragility of PD Controllers for SISO Systems with I/O Delays. In *4th International Conference on System Theory and Control, Sinaia, Romania*, 2010.



- C11. B. Liacu, C. Mendez-Barrios, S.-I. Niculescu, and S. Olaru. Some Remarks on the Fragility of Transparency and Stability in General 4-Channel Architecture for Bilateral Teleoperation with Delay. In *International Conference on Control, Automation and Systems, Korea*, 2010.
- C12. W. Lombardi, A. Luca, S. Olaru, S.-I. Niculescu, P. Boucher, and J. Cheong. Synchronisation de mouvement sous contraintes pour des systèmes à retard. In *Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Nancy, France*, page 135, 2010.
- C13. W. Lombardi, A. Luca, S. Olaru, and SI Niculescu. State admissible sets for discrete systems under delay constraints. In *Proc. IEEE ACC*, 2010.
- C14. W. Lombardi, A. Luca, S. Olaru, SI Niculescu, and J. Cheong. Feedback Stabilization and motion synchronization of systems with time-delay in the communication network. In *9th IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, 2010.
- C15. W. Lombardi, S. Olaru, and S.-I. Niculescu. Invariant sets for a class of linear systems with variable time-delay. In *European Control Conference, Budapest Hungary*, 2009.
- C16. W. Lombardi, S. Olaru, and S.-I. Niculescu. Robust invariance for a class of time-delay systems with repeated eigenvalues. In *8th IFAC Workshop on Time Delay Systems, Sinaia Romania*, 2009.
- C17. H. N. Nguyen and S. Olaru. Hybrid modeling and optimal control of juggling systems. In *4th International Conference on System Theory and Control, Sinaia, Romania*, 2010.
- C18. H. N. Nguyen, S. Olaru, and M. Hovd. Patchy approximate explicit model predictive control. In *International Conference on Control, Automation and Systems, Korea*, 2010.
- C19. S. Olaru and P.R. Ayerbe. Robustification of explicit predictive control laws. In *2006 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4556–4561, 2006.
- C20. S. Olaru, JA De Doná, and MM Seron. Positive invariant sets for fault tolerant multisensor control schemes. In *Proceedings of the IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008. International Federation of Automatic Control.
- C21. S. Olaru, I. Dumitrache, and D. Dumur. Modified MLD form for discrete optimization of hybrid systems. In *Analysis and design of hybrid systems 2003 (ADHS 03) : a proceedings volume from the IFAC Conference, St. Malo, Brittany, France*, page 135, 2003.
- C22. S. Olaru, I. Dumitrache, and D. Dumur. On the continuity of control laws based on multiparametric linear programming. In *13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation*, 2006.
- C23. S. Olaru and D. Dumur. Feasibility of constrained generalized predictive control within invariant sets framework. In *Control Conference, 2004. 5th Asian*, pages 922–930, 2004.
- C24. S. Olaru and D. Dumur. On constrained predictive control on-line optimization routines. In *IEEE Conf. Methods and Models in Automation and Robotics, Poland*, 2004.
- C25. S. Olaru and D. Dumur. A parameterized polyhedra approach for explicit constrained predictive control. In *Proceedings of 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, The Bahamas, December 2004.

- C26. S. Olaru and D. Dumur. Some Feasibility Issues Related to Constrained Generalized Predictive Control. In *1st International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics ICINCO*, volume 4, pages 25–28, 2004.
- C27. S. Olaru and D. Dumur. Compact explicit mpc with guarantee of feasibility for tracking. In *In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 969–974, 2005.
- C28. S. Olaru and D. Dumur. Constrained model predictive control. Influence of redundancy in the set of constraints, possible amelioration. In *IMACS Conference*, 2005.
- C29. S. Olaru and D. Dumur. Explicit constrained model predictive control. The influence of constraints redundancy. In *5th IEEE International Conference on Control and Automation, Budapest, Hongrie*, 2005.
- C30. S. Olaru and D. Dumur. A parameterized polyhedra approach for the explicit robust model predictive control. In Joaquim Filipe, Juan Andrade-Cetto, and Jean-Louis Ferrier, editors, *ICINCO*, pages 3–10. INSTICC Press, 2005.
- C31. S. Olaru and D. Dumur. On the continuity and complexity of control laws based on multiparametric linear programs. In *2006 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5465–5470, 2006.
- C32. S. Olaru, D. Dumur, and S. Tebbani. Parameterized polyhedra approach for robust constrained generalized predictive control. pages 428–433, 2005.
- C33. S. Olaru and M. Hovd. Metrics Over the Class of Polyhedra and Several Correspondences in Constrained Control. In *IEEE International Conference on Control and Automation, 2007. ICCA 2007*, pages 3162–3168, 2007.
- C34. S. Olaru and SI Niculescu. Predictive control for linear systems with delayed input subject to constraints. In *Proc. IFAC World Congress*, 2008.
- C35. S. Olaru, F. Stoican, J. A. DeDona, and M. Seron. Necessary and sufficient conditions for sensor recovery in a multisensor control scheme. In *7th IFAC Safeprocess, Barcelona, Spain*, 2009.
- C36. Sorin Olaru, Hichem Benlaoukli, and Silviu-Iulian Niculescu. Mpc for systems with variable time-delay - robust positive invariant set approximations. In Joaquim Filipe, Juan Andrade-Cetto, and Jean-Louis Ferrier, editors, *ICINCO-SPSMC*, pages 177–182. INSTICC Press, 2008.
- C37. I. Prodan, S. Olaru, C. Stoica, and S.-I. Niculescu. Avoidance constraints and path following for Multi-Agent Systems. In *International Conference on Control, Automation and Systems, Korea*, 2010.
- C38. I. Prodan, S. Olaru, C. Stoica, and S.-I. Niculescu. Path following with collision avoidance and velocity constraints for multi-agent group formations. In *4th International Conference on System Theory and Control, Sinaia, Romania*, 2010.
- C39. Pedro Rodríguez-Ayerbe and Sorin Olaru. Off-line robustification of explicit mpc laws - the case of polynomial model representation. In Joaquim Filipe, Juan Andrade-Cetto, and Jean-Louis Ferrier, editors, *ICINCO-SPSMC*, pages 96–101. INSTICC Press, 2008.
- C40. P. Rodríguez and S. Olaru. Disturbance model in explicit control laws. In *4th International Conference on System Theory and Control, Sinaia, Romania*, 2010.
- C41. P. Rodríguez-Ayerbe and S. Olaru. Off-line robustification of explicit control laws. In *17th IFAC World Congress*, 2008.

- C42. G. Sandou, S. Olaru, E. Witrant, and S. Niculescu. Receding Horizon Control : an Effective Methodology for Energy Management in Complex Systems. In *IFAC Conference on Control Methodologies and Technology for Energy Efficiency*, 2010.
- C43. G. Sandou, E. Witrant, S. Olaru, and S. Niculescu. Receding horizon climate control in metal mine extraction rooms. In *IEEE CASE'08*, 2008.
- C44. F. Scibilia, R. Bitmead, S. Olaru, and M. Hovd. Maximal robust feasible sets for constrained linear systems controlled by piecewise affine feedback laws. In *7th International Conference on Control and Automation, New Zealand*, 2009.
- C45. F. Scibilia, S. Olaru, and M. Hovd. Approximate explicit linear mpc via delaunay tessellation. In *European Control Conference, Budapest Hungary*, 2009.
- C46. Stoican, S. Olaru, and G. Bitsoris. A fault detection scheme based on controlled invariant sets for multisensor systems. In *Proceedings of the the IEEE Systol Conference, Nice, France*, 2010.
- C47. Stoican, S. Olaru, J. A. DeDona, and M. Seron. A fault tolerant control scheme based on sensor switching and dwell time. In *Proceedings of the the IEEE Control and Decision Conference, Atlanta, USA*, 2010.
- C48. F. Stoican and S. Olaru. Fault tolerant positioning system for a multisensor control scheme. In *Proceedings of the the IEEE Multi-Conference on Systems and Control, Yokohama, Japan*, 2010.
- C49. F. Stoican, S. Olaru, J. A. DeDona, and M. Seron. Improvements in the sensor recovery mechanism for a multisensor control scheme. In *Proceedings of the 29th American Control Conference, Baltimore, USA*, 2010.
- C50. F. Stoican, S. Olaru, J. A. DeDona, and M. Seron. Reference governor for tracking with fault detection capabilities. In *Proceedings of the the IEEE Systol Conference, Nice, France*, 2010.
- C51. F. Stoican, S. Olaru, M. Nesic, and S. Marinkovic. Control Design of a Positioning System upon a Fault Tolerant Multisensor Scheme. In *17th Telecommunications forum TELFOR*, pages 685–688, 2009.
- C52. C.S. Teodorescu, Sakamoto N., and S. Olaru. Controller design for sine wave tracking on magnetic levitation system : A comparative simulation study. In *Proceedings of the the IEEE Multi-Conference on Systems and Control, Yokohama, Japan*, 2010.
- C53. C.S. Teodorescu, H. Sigurdidjane, S. Olaru, and A. Arzande. Towards Robust Recursive Nonlinear Control with Constraints for a Class of Dynamical Systems. In *Proc. IEEE ACC*, 2010.
- C54. J. Thomas, D. Dumur, S. Olaru, and J. Buisson. Robust model predictive control for piecewise linear hybrid systems. In *2nd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, 2006.
- C55. J. Thomas, D. Dumur, S. Olaru, and J. Buisson. Reachability and Robust Control of PWA Systems with Parameter Variations and Bounded Disturbance. In *IFAC World Congress*, 2008.
- C56. J. Thomas, S. Olaru, J. Buisson, and D. Dumur. Attainability and set analysis for uncertain PWA systems with parameter variations and bounded disturbance. In *Proceedings of the 21st annual international conference on Chinese control and decision conference*, pages 4259–4265. IEEE Press, 2009.

- C57. A. Ulbig, S. Olaru, and D. Dumur. Explicit model predictive control for a magnetic levitation system. In *2008 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1544–1549, 2008.
- C58. A. Ulbig, S. Olaru, D. Dumur, and P. Boucher. Explicit solutions for nonlinear model predictive control : A linear mapping approach. In *9th European Control Conference*, pages 3295–3302, 2007.

### Rapports de recherche, papiers soumis etc.

- T1. Samir EL AKOUM and Kamal NASSER-EDDINE. Optimization of the anchoring mechanism of a novel steerable drilling system. *Technical report*, 2007.
- T2. Jonathan BARCAT, Nazim BENOTMANE, and Olivier LESZCZYNSKI. Détermination du domaine de viabilité des offres d’ajustement en infra-journalier pour une vallée hydraulique. *Technical report*, 2009.
- T3. M. M. Seron, J. A. De Dona, and S. Olaru. Multisensor fault tolerant control allowing sensor healthy-to-faulty and faulty-to-healthy transitions. *under review, IEEE Transaction on Automatic Control*, 2009.
- T4. F. Stoican, S. Olaru, M. M. Seron, and J. A. De Dona. Ultimate bounds for lti with zonotopic disturbances. *to be submitted, Automatica*, 2010.

## Activités de recherche

### P-1 Quelques considérations sur l'interaction optimisation-commande

La problématique fondamentale de l'automatique [2] est celle de la conception, de la mise en oeuvre et de l'exploitation des moyens permettant à l'homme de maîtriser le comportement de systèmes complexes, naturels ou artificiels. La science des systèmes, elle se fonde sur des concepts spécifiques (rétroaction, modélisation, système dynamique, état, signal, optimalité...) qui présentent une efficacité pratique indéniable et un fort impact économique.

On retrouve "la rétroaction et l'optimalité" parmi les éléments de base de la théorie de systèmes et de l'automatique. Le rôle du *feedback* est reconnu unanimement mais son ubiquité [3] le fait souvent passer, à tort, dans le deuxième plan. En ce qui concerne l'interaction optimisation-commande le passage suivant reproduit d'un article récent de Sigurd Skogestad [4] qui peut s'avérer révélateur :

"Feedback is a very powerful tool, but, maybe because of its simplicity, it often gets overlooked and forgotten, and it seems that its advantages need to be rediscovered every 20 years or so. Simple feedback loops, often using simple PID control algorithms, became the main tools for control engineers in the 1930's or so. The theory behind this is known as "classical control" and is documented in the works of Bode, Nichols and others from the 1940's. The main lesson of classical feedback control is : "Pair close and crank up the gain". More specifically, by "pair close" it is meant that one should use an input-output pair with a small phase lag. The effective time delay is the sum of the apparent time delay caused by dead time, inverse responses (unstable RHP zeros) and high-order lags. By "crank up the gain" it is meant that the gain around the feedback loop should be large to get good performance and robustness against uncertainty (changes in the system components). However, the loop gain cannot be too large, otherwise we get instability because of the presence of phase lag (effective time delay).

About 20 years later, in the era of "optimal control" in the 1960's, this lesson was forgotten. The slogan of optimal control was that anything could be controlled provided one had a model and the states were observable and controllable.

It took another 20 years until we reached the 1980's and negative feedback was rediscovered with the introduction of "robust control". Bode's stability criterion was replaced by the "small gain theorem" and powerful new robustness results were derived, including the structured singular value.

However, now, about 20 years later, it seems that the feedback lesson is again being forgotten. To some extent, this is caused by the extensive

use of model predictive control (MPC), which is an improved version of optimal control from the 1960's. MPC is model based and feedback is only introduced indirectly. However, also MPC indirectly uses feedback as its main mean of dealing with uncertainty, and is subject to the same advantages and limitations as derived in classical and robust control. Feedback is sometimes claimed to be outdated, and the argument is : "Feedback is based on what has happened and therefore comes too late. The future is to put focus on getting models and using model-based control". This statement is right in saying that one could use models to improve robustness and performance of feedback control, but it is wrong in saying that feedback is not part of the future.

La conclusion de cette citation peut représenter le point de départ de cette partie du mémoire HDR : *le temps est venu de redécouvrir la puissance du feedback avec ses avantages fondamentaux : simplicité, robustesse stabilisation* en utilisant les avantages de la connaissance du modèle et en exploitant la puissance de calcul à notre disposition. Ce dernier aspect (puissance de calcul) mérite une clarification car, n'oublions pas, les lois de commande classiques resteront imbattables du point de vue simplicité et rapport "performances primaires/effort de calcul". On va considérer qu'étant donné le progrès technologique, la phase de design dispose d'un ressource calculatoire et qu'il se doit de l'utiliser d'une façon performante même si *la lois des rendements décroissants* peut nous ramener à la conclusion qu'un "bon vieux PID" aurait pu stabiliser le processus ou garantir une erreur stationnaire nulle pour un coût imbattable. Néanmoins, ce ne sera pas très souvent le cas car on se délimite assez rapidement de la classe des dynamiques linéaires au moins par l'introduction des contraintes qui rendent impuissants les régulateurs classiques dans leur version canonique. Le plus souvent la simplicité des lois type PID restera un idéal et toute procédure de synthèse essayera de diminuer la complexité pour se rapprocher de ces structures versatiles.

Nous nous trouvons au début du 21e siècle, à plus de 30 ans des premiers travaux théoriques qui définissaient une stratégie cohérente de commande, fondée sur l'optimisation au long de l'évolution d'un système dynamique.

Ce concept fondamental d'optimisation en temps-réel, transforme le processus de synthèse d'une loi de commande. En effet, au lieu d'accorder des paramètres (comme par exemple la constante proportionnelle, le temps d'intégration-dérivation dans le cas de PID) ou de rechercher une fonction de Liapunov de commande, l'exploitation de la puissance de calcul et des routines d'optimisation construit de façon itérative l'action de commande, comme un processus itératif de recherche d'un optimum. Laisser la convergence d'un processus d'optimisation dicter les performances de la boucle fermée peut sembler une attitude désarmante pour un ingénieur automaticien qui voit son *savoir-faire* avalé par la force brute des routines informatiques.

Ce manuscrit veut plaider pour l'idée que la construction de lois de commande prédictive (qui se confond sur les principes essentiels avec la synthèse basée sur l'optimisation temps réel) peut gagner en consistance par l'exploration

de la géométrie des problèmes d'optimisation associés et, surtout, par le recadrage du mécanisme de rétroaction dans ce contexte d'interaction optimisation-commande. Cela va donc nous conduire à la revalorisation des fondamentaux de l'automatique. De ce point de vue, on se place à la frontière entre l'automatique, la géométrie informatique (ou les méthodes ensemblistes) et la théorie de l'optimisation. Le but ultime est de montrer qu'au delà des aspects informatique on retrouve les problèmes fondamentaux comme

- l'analyse structurelle d'un système dynamique (la course de la dimensionnalité, les points d'équilibre, la contrôlabilité)
- la garantie de stabilité
- l'extraction de l'information nécessaire pour le *feedback*.

Tous ces concepts sont familiers à l'automatique et on peut constater que les méthodes traditionnelles offrent des réponses pertinentes ou des pistes pour les problèmes ouverts dans le domaine de la décision basée sur l'optimisation.

Dans cette partie des considérations générales il faut souligner que l'optimisation en temps réel pour la commande d'un processus implique une description en temps discret de la dynamique. Cette modélisation est bien comprise dans la littérature [5], [6], son application étant en mesure de nous faire éviter les pièges des traitements superficiels basés sur le principe d'une "correspondance mutatis-mutandis" avec le continu. Révélatrice pour le rapport continu-discret dans la théorie des systèmes est la citation suivante [261] qui rappelle l'esprit du mathématicien Aristide Halanay :

... dans la constitution d'un nouveau domaine, après les analogies, suivent les "pathologies"; elles sont celles qui stimulent le progrès des sciences.

Avant de poursuivre dans l'analyse de la commande prédictive et de présenter les contributions et les projets à court et moyen terme il est nécessaire de faire quelques commentaires sur la terminologie utilisée dans la littérature. Celle-ci peut prêter à confusion pour un lecteur peu familier avec l'imagination des contributeurs, qui, pour des raisons historiques et/ou subjectives se réfèrent à des concepts similaires en utilisant des syntagmes déconcertants par l'absence des similitudes. L'exemple par excellence est celui même de la *commande prédictive* telle qu'elle sera dénommée dans le présent document. Ce n'est pas autre chose qu'un raccourci du concept de *commande prédictive à base de modèle* (Model-based Predictive Control - MPC) ou encore "commande prédictive par modèle interne" [262]. En allant plus loin, on trouve dans des références comme [220] la dénomination alternative de "commande sur un horizon glissant". Nous mentionnons qu'il n'existe pas de différences conceptuelles entre les deux méthodes et que cette dernière appellation, même moins populaire, a l'avantage de faciliter la translation dans une forme proche du problème dual d'estimation, connu dans la littérature en tant qu'*estimation à horizon glissant*. En effet, c'est difficile d'associer une expression qui utilise le syntagme "prédiction" pour une technique qui porte essentiellement sur les informations du passé.

Et enfin, pour fixer les idées, le schéma bloc général sera décrit dans la figure 1 avec les principaux éléments et leurs interactions. On retrouvera le système

bouclé qui fait intervenir l'optimisation temps-réel dans le processus de décision (plus précisément dans la construction d'une action de commande à chaque pas d'échantillonnage).

## P-2 La commande prédictive dans une perspective historique

L'une des personnalités qui ont contribué à la consolidation d'une technique de commande à base de prédiction, Jacques Richalet mentionnait en [10] la fatalité de l'apparition de la commande prédictive en Automatique :

... l'apparition de cette technique (n.a. prédictive) était "fatale", même s'il peut sembler un peu facile de prédire le passé!

Une telle discussion sur les conditions historiques et en particulier sur les éléments qui ont conduit à l'émergence de la commande prédictive dépasse le cadre du présent mémoire. Notons seulement que de notre point de vue<sup>1</sup>, la nécessité historique de tenir compte de contraintes statiques/structurelles depuis la phase de synthèse de la loi de commande pour les systèmes dynamiques est celle qui aurait poussé vers l'émergence d'une technique de commande basée sur l'optimisation en cours de fonctionnement. Cette cristallisation est indépendante des acteurs présents dans le paysage scientifique et le principal argument avancé à cet égard est que l'on trouve dans la commande optimale (à horizon fini) une base adéquate pour un traitement homogène des contraintes dynamiques, des saturations et des limitations statiques. Le seul pas à franchir était la conquête d'un horizon infini par des opérations sur un horizon fini pour des raisons liées à l'implémentation. La solution d'un horizon fini et glissant constitue le dernier ingrédient pour la mise en place de la technique prédictive.

Les techniques de commande avec connotation prédictive ont apparues dans plusieurs groupes de recherche (en France - J. Richalet, Etats-Unis - C. Cutler, B. Ramaker et D. Prett, Royaume-Uni - D. Clarke) et ont été rapidement acceptées dans l'environnement industriel<sup>2</sup> (procédés chimiques essentiellement - systèmes avec un temps de réponse relativement long par rapport à la puissance de calcul disponible) fait qui rend encore plus compliquée l'analyse qui veut aller au-delà des sources bibliographiques car les acteurs industriels n'ont pas le réflexe de dissémination à l'émergence des nouvelles méthodologies.

Si dans les années '70 on trouve des essais qui peuvent être classés plutôt dans la catégorie des solutions ingénieuses à des problèmes pratiques, au début des années 80 nous nous retrouvons en présence d'un ensemble de principes généraux qui constituent la base de la méthodologie de commande prédictive et représentent le fondement pour le succès qui arrivera bientôt.

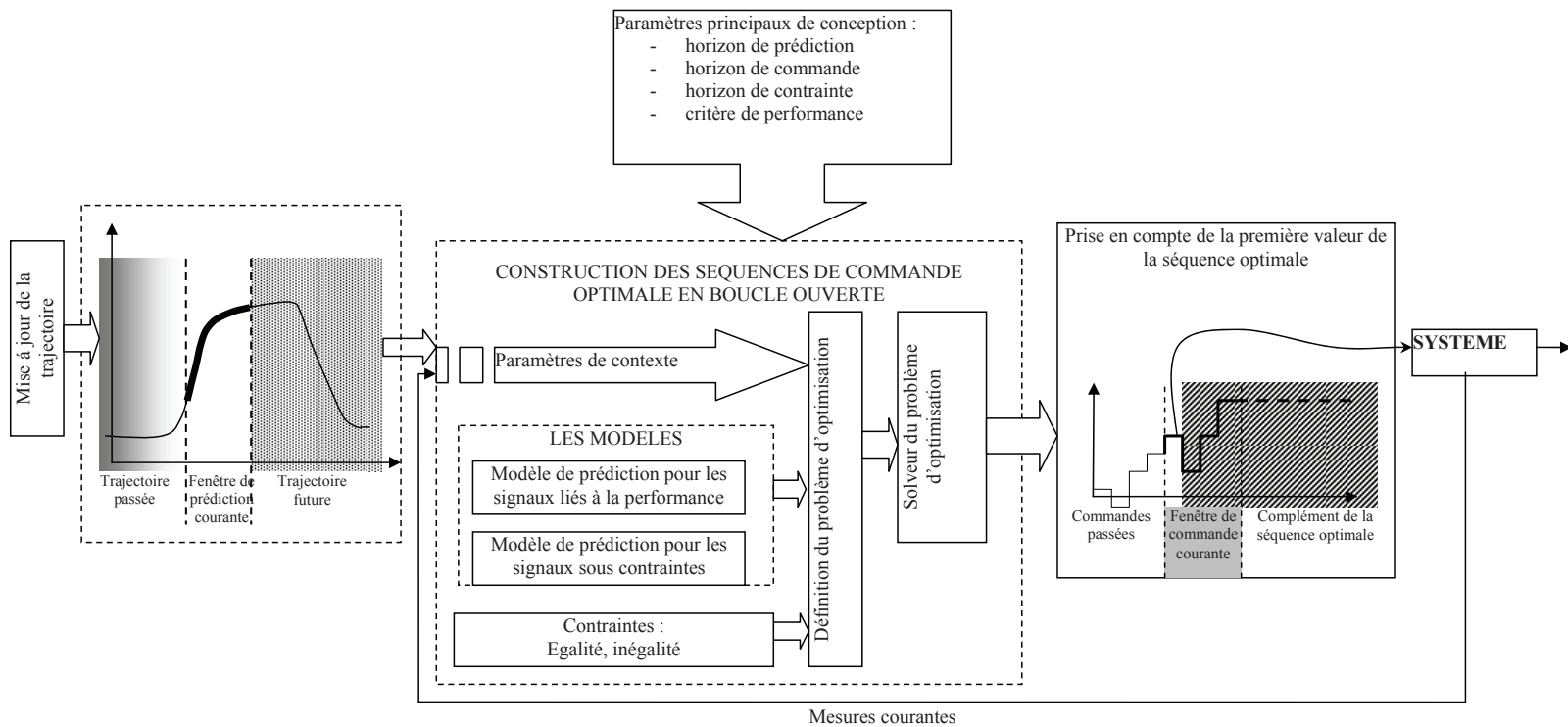
Les références bibliographiques [182], [11] attestent qu'il a été compris à cette époque le fait que, pour les systèmes invariants dans le temps et en absence de

1. Qui souscrit à la vision historique de J. Richalet.

2. Les produits commerciaux ADERSA, IDCOM/MAC, DMC, MUSMAR ou plus tard EPSAC étant des exemples du succès dans le milieu industriel.



Figure 1. Schéma bloc d'une structure de commande prédictive



contraintes, la commande prédictive peut se passer de l'optimisation à chaque étape de l'échantillonnage. A partir de la forme analytique des conditions d'optimalité, les lois de commande peuvent se formaliser en termes de régulateurs polynomiaux (équivalents RST) [176] à deux degrés de liberté en partant des modèles CARIMA.

Un avantage principal provenant de cette caractéristique linéaire des lois de commande est que la théorie des systèmes linéaires (sans doute la plus mature de l'automatique) peut être utilisée pour l'analyse des lois de commande prédictive et des systèmes en boucle fermée. Les ouvrages de référence de D. Clarke [182] montrent que les performances d'un système bouclé à l'aide de la commande prédictive peuvent être accordées de manière transparente en fournissant les paramètres suivants : les horizons de commande/prédiction et les pondérations du critère de performance (voir par exemple l'article de comparaison concernant le "tuning" prédictif à cette époque [13]). Ainsi, le choix de la commande prédictive (essentiellement basé sur un raisonnement temporel) par rapport à d'autres techniques de synthèse classique (RST par allocation des pôles par exemple) reste un choix motivé par des considérations techniques et des préférences liées à l'application [170].

Nous pouvons retenir cependant que, à ce stade, la commande prédictive (en l'absence de contraintes) s'est présentée comme une méthodologie *complète* pour le cadre linéaire et peut être appliquée à des systèmes à déphasage non-minimal, en présence de retards (couvrant les constructions de type prédicteur de Smith), des systèmes qui présentent des modes instables. La méthodologie peut être étendue au cas des systèmes multivariables comme cela a pu être mis en évidence au début des années 90 [176], [262] ou [234].

D'importants changements structurels se produisent lorsque les contraintes interviennent dans la formulation des problèmes d'optimisation à horizon glissant<sup>3</sup>. Des études concernant les propriétés intrinsèques des systèmes en boucle fermée avec la commande prédictive (qui prennent en compte les contraintes de la phase de synthèse) abondent durant les années '90. Généralement il ne s'agit pas de la structure du problème d'optimisation qui devrait évidemment être adaptée pour assurer un traitement efficace, mais surtout d'un intérêt pour la stabilité et pour le choix des paramètres qui la garantissent [232]. L'imposition des règles pour la synthèse des lois de commande prédictive avec garanties de stabilité a été un processus de longue durée (les références bibliographiques s'étalent sur une décennie avec une démarche laborieuse). En outre, une nouvelle problématique pointe ses dangers : la faisabilité (du problème d'optimisation associé) qui exige une réponse claire pour assurer de façon récursive la viabilité du processus de commande. Dans le pire des cas, une technique de récupération doit être mise en place pour les situations dans lesquelles un message d'infaisabilité de la routine d'optimisation compromettra les objectifs d'un système de commande classique.

---

3. Nous rappelons ici que l'utilisation des lois de commande classique (de type PID par exemple) exige aussi des mécanismes du type anti-windup pour éviter les effets catastrophiques des contraintes sur le fonctionnement en boucle fermée.

L'analyse de la commande prédictive dans une perspective historique montre qu'on ne peut pas la dissocier de méthodes d'optimisation utilisées dans la construction de l'action de commande à chaque pas d'échantillonnage. Ainsi, nous trouvons les implémentations des méthodes de recherche de l'ensemble actif de contraintes pour voir ensuite, à la fin des années 90, l'émergence des routines type "point intérieur". Toutes ces associations des techniques permettront la migration MPC à des applications industrielles, mais nous ne pouvons pas ignorer le fait que les processus restent relativement lents, surtout les procédés chimiques. Il n'y a rien d'étonnant, compte tenu du fait que les praticiens de ce domaine sont ceux qui ont soutenu l'effort de recherche à long terme sur les questions liées à la commande prédictive [255].

Nous ne pouvons pas ignorer dans cet aperçu historique les tentatives d'adapter les techniques LMI aux constructions de commande prédictive. A la fin des années '90 [219], ces méthodes se positionnent en alternative robuste qui exploite les caractéristiques convexes des contraintes, mais surtout qui s'adapte à la convexité de la description des incertitudes du modèle et des arguments du problème d'optimisation MPC. En conclusion, on peut assimiler la commande prédictive à base de LMI, à une synthèse robuste avec des critères de performance [17] qui sont mis à jour en fonction des mesures/estimations de l'état du système. L'inconvénient restera néanmoins de taille, car la résolution d'un problème LMI en temps réel peut s'avérer une tâche complexe surtout pour une architecture embarquée.

Plus tard (et cette tendance se poursuit), en combinaison avec des constructions alternatives des indices de performance partant des exposants de Liapunov, ces méthodes suscitent un intérêt grandissant par la flexibilité des fonctions de Liapunov résultantes.

Passons pour la suite à l'époque moderne de la commande prédictive et regardons plus en détail les classes des systèmes avec leurs difficultés spécifiques. La commande prédictive *moderne* utilise des modèles de prédiction d'état, ce qui permet par le caractère minimal de la représentation, une formulation élégante des principaux résultats théoriques [232,203]). La stabilité dans ce cadre fait appel à des concepts classiques pour les dynamiques en temps discret [18], [5], [6]. La construction classique considère la fonction de coût comme une fonction de Liapunov (voir par exemple en [19]) où la continuité de la dynamique du système est exploitée. Cette hypothèse de continuité est relaxée en [20]<sup>4</sup>, [21]<sup>5</sup>. Enfin les résultats concernant la stabilité exponentielle sont présentés en [22].

Un des articles avec un grand impact [23] discute la stabilité asymptotique (en montrant que la continuité du système et de la fonction de Liapunov est nécessaire seulement à l'origine) mais introduit deux concepts fondamentaux pour la commande basée sur l'optimisation en temps réel :

- la sous-optimalité

---

4. L'attractivité n'est pas garantie et la stabilité dans le sens de Liapunov est obtenue en se basant sur la continuité seulement dans le voisinage de l'origine.

5. Dans cet article la continuité est citée mais n'est pas utilisée dans la preuve de stabilité.

- la faisabilité du problème d’optimisation

Tous les résultats théoriques (capitalisés suite à l’effort de recherche académique soutenu à la fin des années 90) ont montré que le chemin est encore long et des problèmes restent à résoudre car on peut se demander ce qu’on peut dire dans le cas d’un système qui présente des discontinuités dans la dynamique, pour lequel la fonction de coût proposée est discontinue et/ou en présence des routines d’optimisation qui proposent des solutions sous-optimales. Cette fragilité du MPC [24] montre qu’une liaison avec les résultats obtenus dans le contexte de la commande robuste sont désirables (au moins du point de vue théorique car pratiquement les algorithmes MPC font preuve d’une robustesse intrinsèque sans doute liée aux choix de critères quadratiques et à de bons choix des horizons de prédiction). Dans la littérature récente, les études dédiées à la commande prédictive robuste abondent, voir par exemple [25], [26] et les références associées.

Pour se rapprocher des contributions théoriques de l’auteur dans le domaine, il faut souligner que, récemment, les approches ensemblistes ont eu un impact important (voir [27] par exemple) dans la communauté MPC. Les motivations sont multiples, essentiellement liées aux propriétés d’invariance positive [28] d’un ensemble par rapport à une dynamique mais aussi par la description locale (sur des partitions de l’état) de la loi de commande sous une forme analytique. Voici quelques détails dans une liste nonexhaustive avec des références des publications qui peuvent donner l’envie d’aller plus loin :

- La stabilité MPC peut être garantie par l’ajout de contraintes terminales [29] qui doivent décrire un ensemble invariant sous certaines conditions [30].
- Le domaine faisable est à son tour un ensemble invariant pour la dynamique en boucle fermée. On retrouve ici des connexions avec les notions d’ensemble maximal et minimal positif invariant [171]
- La commande prédictive robuste peut être traitée dans ce contexte ensembliste [32]
- En présence des contraintes, la commandabilité est souvent remplacée par un étude d’atteignabilité [33] qui est souvent traitée avec méthodes ensemblistes
- les incertitudes (additives ou paramétriques) conduisent à une reformulation de la dynamique sous la forme d’inclusions différentielles [34]. La présence des contraintes (spécifiquement pour le cas de l’optimisation temps-réel) nous conduit vers une analyse de la boucle fermée dans le cadre de la théorie de la viabilité [35].
- dans le cadre linéaire le domaine faisable pour un problème MPC peut être représenté comme un polyèdre paramétré [248]
- les solutions explicites dans le même cadre seront décrites pas une partition de l’espace d’état en des régions polyédrales
- ...

En réévaluant maintenant la commande prédictive du point de vue des processus à commander, on peut se rendre compte qu’il existe plusieurs classes de systèmes qui suscitent l’intérêt des chercheurs dans cette période moderne. On

propose ici trois catégories (présentées par le degré croissant de généralisation) selon le modèle de prédiction, toutes les trois étant identifiées par leur particularités comme vecteur de développement dans la commande basée sur optimisation en temps réel.

- *Systèmes linéaires sous contraintes linéaires impliquant les états et les entrées* Dans cette direction, un effort important a été fait pour éviter l’optimisation temps-réel par la caractérisation de la solution d’une manière explicite. Cela fait appel aux éléments de la programmation multiparamétrique et conduit vers une formulation des lois de commande prédictive sous la forme d’une fonction affine par morceaux définie sur l’espace d’état du modèle de prédiction. Dans la mesure où les formulations explicites des lois de commande peuvent être construites de manière efficace (et ayant une représentation assez simple pour permettre l’évolution en temps-réel), on remarque les problèmes sous-jacents liés à cette structure affine par morceaux (de la dynamique en boucle fermée). Les difficultés apparaissent dans la partie de simplification de la complexité des lois de contrôle explicites (étroitement liée à des problèmes de géométrie de la représentation des régions non-convexes). L’extension des solutions explicites pour des modèles de prédiction affectés par l’incertitude (paramétrique, additive, etc.) conduit au changement de formulation du problème d’optimisation car, finalement, on se retrouve dans les conditions d’un jeu qui peut être formalisé par un critère min-max ou max-min selon la relation entre l’action de commande et l’incertitude.
- *Systèmes hybrides* La commande des systèmes hybrides (dont la dynamique est décrite d’une façon simple par des changements en fonction de la région traversée dans l’espace étendu état+entrée) soulève des problèmes intéressants par le caractère binaire des variables de décision [165]. Les lois de commande prédictive doivent tenir compte de ces caractéristiques qui se répercutent dans la structure mixte du vecteur des variables de décision dans le problème d’optimisation à horizon glissant. Au delà de l’aspect optimisation, les discontinuités de la dynamique conduisent à des problèmes de stabilisation difficiles [36], [37].
- *Systèmes non-linéaires* Cette classe de modèles englobe les précédentes mais par leur généralité ne permettent pas une approche explicite car la partition du domaine d’état se fait en des régions non-convexes. Le tableau n’est pas plus optimiste dans le cas d’une approche optimisation temps-réel car les problèmes à résoudre peuvent présenter des optimum locaux et des domaines faisables non-connectés, dégénérés ou non-convexes. Les approches MPC varient de l’introduction de contraintes de type égalité [19], l’utilisation d’un horizon dual [38] ou d’un horizon quasi-infini [39]. On note un effort remarquable fait dans l’adaptation des notions de type stabilité entrée-sortie (ISS - input to state stability) [221], le concept de commande prédictive à base de tubes de convergence autour d’une trajectoire de référence [258] ou la commande prédictive par l’exploitation des dynamiques des ensembles [257].

Un indicateur important dans le développement historique d'un domaine de recherche est représenté par les livres qui lui sont dédiés. Il existe dans la littérature des monographies qui jalonnent les développements de la commande basée sur l'optimisation en temps réel et qui conduisent généralement (par l'utilisation d'un *modèle de prédiction* et l'application du *principe de l'horizon glissant* pour le choix de la trajectoire) vers la *commande prédictive*. On présente par la suite quelques repères géographiques et chronologiques pour leur apparition avec des commentaires sur les problématiques couvertes (les titres cités par la suite ne représentent pas une liste exhaustive pour le domaine mais plutôt une bibliographie nuancée par l'expérience de l'auteur du présent manuscrit).

Un des premiers ouvrages sur le sujet est celui de R. Bitmead et coauteurs [43] qui se pose des questions principales sur la base théorique de cette méthodologie émergeant à l'époque (1990) mais qui, paradoxalement, montrait un succès certain dans le monde industriel<sup>6</sup>. Il est intéressant de remarquer dans cette première référence, le lien établi avec la commande adaptative qui place les racines de la commande prédictive dans une perspective historique plus proche de la commande adaptative que de la commande optimale.

Une monographie qui apparaît au moment du plein essor de la théorie MPC est celle de E. Camacho et C. Bordons [45] qui traite en détails la mise en équation du problème d'optimisation sur un horizon fini à base d'un modèle de prédiction en fonction de transfert ou en représentation d'état. Agrémenté d'exemples ponctuels qui soutiennent l'adaptation de cette méthodologie à différentes classes de systèmes (instables, phase non-minimale, affectées par le retard), le volume devient très populaire et est réédité (sans doute à cause de son succès et des développements ultérieurs qui n'étaient pas traités dans l'édition première) au début des années 2000, [46].

L'école anglaise qui a eu une contribution majeure dans le développement de la commande prédictive (voir les travaux des pionniers de la formulation GPC -Generalized predictive control- [47]) a proposé à son tour par J. A. Rossiter [48] et J. M. Maciejowski [49] deux livres de référence. Si [48] reste à un niveau descriptif et est fort indiqué pour ceux qui veulent faire la connaissance du domaine, on retrouve dans [49] une analyse poussée de l'état de l'art au niveau théorique et méthodologique, avec un effort appréciable en ce qui concerne la prise en compte des contraintes et les limitations associées à ce type de synthèse de lois de commande.

Les travaux de recherche provenant des centres de recherche d'Australie sont marquants également dans la généalogie MPC (le titre déjà mentionné [43] étant un exemple dans ce sens). Il faut remarquer une référence significative pour l'analyse des problèmes d'optimisation et des conditions d'optimalité dans le cadre prédictif [29] avec une mention spéciale pour la présence des chapitres dédiés au traitement du problème dual d'estimation à horizon glissant.

---

6. Qin et Badgwell [44] ont recensé les versions industrielles de la commande prédictive en détaillant toutes les années et les domaines d'application de cette technologie.

Récemment, une monographie [32] est parue ayant comme auteurs deux noms avec des contributions marquantes dans la recherche liée à la commande prédictive (D. Mayne et J. Rawlings). On retrouve les notions comme la commande prédictive basée sur les tubes (*tube MPC*) et des résultats liés à la commande prédictive robuste qui répondent aux critiques récurrentes concernant la complexité des approches basées sur l'optimisation qui prend en compte les incertitudes de modèle de façon brute.

Une référence historique est représentée par la monographie [11] de R. Soeterboek (provenant de l'école néerlandaise d'automatique) qui se présente à la fin des années 80 et au début des années '90 comme un document révélateur à propos des problèmes de stabilité pour des faibles horizons de prédictions mais aussi pour les caractéristiques communes à toutes les méthodes basées sur l'optimisation à horizon glissant.

En Italie, un livre [50] dédié à la commande prédictive voit le jour avec un solide fondement mathématique (en démontrant formellement les liens entre la commande optimale, la commande prédictive et celle adaptative) ayant E. Mosca comme auteur. Il est intéressant dans une perspective historique, de mentionner que le même auteur a conduit par la suite des études sur les techniques de type gouverneur de référence qui ont des similarités indéniables avec les principes d'une optimisation en temps-réel comme support à la décision.

En Allemagne on retrouve un intérêt pour l'application de la commande prédictive dans une monographie comme [1].

En Asie, les contributions ne manquent pas mais leur pénétration dans la littérature occidentale reste marginale. On cite une monographie remarquable [220], un des auteurs, W. Kwon ayant une longue liste de contributions liées à "la commande à horizon glissant" comme il préfère appeler la synthèse basée sur l'optimisation temps-réel.

On laisse pour la fin de ce tour d'horizon non exhaustif l'école française avec deux références pour la commande prédictive linéaire [262] (et sa réédition en version anglaise [51]) et [176]. Ces deux monographies se distinguent par l'aspect méthodologique de la présentation qui va pousser l'analyse jusqu'aux derniers détails de l'implémentation et permet le passage à l'application algorithmique. Dans une perspective historique, la formulation PFC -Predictive Functional Control, représente un repère notable (pour certains auteurs représentant "la vraie" première référence) par le fait qu'elle identifie les éléments de base d'une commande à base de prédiction [52] à la fin des années '70. De date plus récente, le volume collectif [10] (dont un chapitre contribué par l'auteur du présent mémoire HDR) dresse l'état de l'art, avec les dernières avancées de la commande prédictive, en indiquant des pistes de recherche avec les problèmes ouverts.

Tous ces repères bibliographiques sont pertinents pour la commande prédictive linéaire (basée sur des modèles de prédiction linéaires et des contraintes linéaires). La commande prédictive non linéaire représente un sujet de recherche actif avec ses propres références (voir [53], et un état de l'art dans [54]) mais représente un cadre plus large par les approches possibles (déclinées selon les sous-classes des

non linéarités ou par rapport à des hypothèses concernant la complexité/temps de réponse du processus à commander). Néanmoins, on se permet de citer ici un ouvrage [55] qui présente une approche de stabilisation basée sur la commande prédictive ayant la particularité d'une réparamétrisation des degrés de liberté de l'action de commande durant la prédiction, avec l'application des résultats pour des systèmes caractérisés par des réponses transitoires rapides.

Les problèmes ouverts ainsi que les dernières avancées de la commande prédictive sont recueillis dans une série éditée par la maison Springer en relation avec le cycle de conférences *Assessments and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control* [56], [57], [58].

Il est important de mentionner que, dans le cas des systèmes de grande taille (comme par exemple les réacteurs chimiques), l'approche prédictive classique sera rapidement submergée par l'effort de calcul et généralement l'effort de recherche et d'adaptation de la commande se fait dans la partie numérique liée directement aux routines d'optimisation. Cette direction de recherche est tangentielle à nos préoccupations même si elle est tout à fait importante dans le contexte global de l'interaction optimisation-commande. Le lecteur intéressé peut consulter des ouvrages comme [59] ou [60].

En guise de conclusion de cette vision historique de la commande prédictive et de l'interaction optimisation-commande on mentionne quelques chiffres remarquables pour la popularité de cette technique :

- Lors du congrès IFAC 2002 à Barcelone : 112 articles contenant "predictive control" (titre, résumé et mots clés) dans un total de 1653 (pour comparaison on retrouve 52 articles contenant "PID")
- Lors du congrès IFAC 2005 à Prague : 137 articles contenant "predictive control" dans un total de 2317 (et 59 articles contenant "PID")
- Lors du congrès IFAC 2008 à Seoul : 130 articles contenant "predictive control" dans un total de 2670 (et 56 articles contenant "PID")

Dans l'un des journaux les plus prestigieux de la communauté - *Automatica*, on retrouve des références liées à la commande prédictive dans le "TOP 10 des articles les plus cités" :

- *Constrained MPC : Stability & Optimality* Mayne, Rawlings, Rao, Sockaert ; 2000 (deuxième selon le nombre de citations)
- *Generalized Predictive Control* Clarke, Mohtadi, Tuffs ; 1987 (troisième selon le nombre de citations)
- *MPC : Theory and Practice - A Survey* Garcia, Prett, Morari ; 1989 (septième selon le nombre de citations)
- *Control of Systems Integrating Logic, Dynamics and Constraints* Bemporad, Morari ; 1999 (neuvième selon le nombre de citations)

### P-3 Contributions personnelles dans le domaine

La présentation des contributions dans le domaine de la commande des systèmes sous contraintes et de l'interaction optimisation-géométrie-commande commence naturellement avec les résultats obtenus durant la préparation de la



thèse de doctorat, soutenue en 2005 à l'Université Paris Sud [248], et suit les développements sur le sujet et les déclinaisons dans les domaines adjacents.

### P-3.1 La thèse

Le mémoire de thèse présente des contributions à l'étude de la commande prédictive basée sur l'application, selon le principe de l'horizon glissant, de la première composante de la séquence optimale  $\mathbf{k}_u^* = [u_t^T, \dots, u_{t+N-1}^T]^T$  obtenue par la résolution à chaque pas d'échantillonnage d'un problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{k}_u} \quad & \varphi(x_{t+N}) + \sum_{k=0}^{N-1} l(x_{t+k}, u_{t+k}) \\ \text{avec} \quad & x_{t+k+1} = f(x_{t+k}, u_{t+k}); 0 \leq k \leq N-1 \\ & g(x_t, \mathbf{k}_u) \leq 0 \\ & h(x_{t+N}) \leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

avec des contraintes liées à la dynamique, aux limitations/saturations de l'état ou de la commande et aux contraintes terminales.

Une des contributions théoriques majeures a été la description topologique de la variation du domaine faisable pour un problème de commande à horizon glissant par le concept de *polyèdres paramétrés*, défini sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) = & \left\{ \mathbf{k}_u(x) \in \mathbb{R}^p \mid A_{eq} \mathbf{k}_u = B_{eq}x + b_{eq}; A_{in} \mathbf{k}_u \leq B_{in}x + b_{in} \right\} \\ = & \left\{ \mathbf{k}_u(x) \mid \mathbf{k}_u(x) = \sum_{i=1}^{\vartheta} \alpha_i(x) \mathbf{v}_i(x) + \sum_{i=1}^{\rho} \beta_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{\lambda} \gamma_i \mathbf{l}_i \right\} \\ 0 \leq & \alpha_i(x) \leq 1, \sum_{i=1}^{\vartheta} \alpha_i(x) = 1, \beta_i \geq 0, \forall \gamma_i. \end{aligned} \quad (2)$$

*Selon notre connaissance c'est pour la première fois (en [61]) que ce concept a été utilisé dans les études d'automatique.*

En effet, il était connu que, pour les modèles de prédiction linéaires avec contraintes linéaires et coût quadratique, on pouvait écrire un problème d'optimisation quadratique multiparamétrique [62] :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_u^*(x_t) = & \min_{\mathbf{k}_u} F(x_t, \mathbf{k}_u) \\ \text{avec :} \quad & \begin{cases} A_{in} \mathbf{k}_u \leq b_{in} + B_{in}x_t \\ A_{eq} \mathbf{k}_u = b_{eq} + B_{eq}x_t \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

mais toutes ces études étaient orientées vers les conditions KKT d'optimalité [63] avec les problèmes structuraux bien connus dans les cas de dégénérescence, pour lesquels la qualification de contraintes (Abadie) n'est plus satisfaite [64]. C'est par le biais des polyèdres paramétrés et leur représentation duale que toutes ces caractéristiques peuvent être analysées et exploitées numériquement.

Les résultats précédents présentés dans la littérature liée à la construction des formulations analytiques (en utilisant les conditions KKT [63], [62], en se

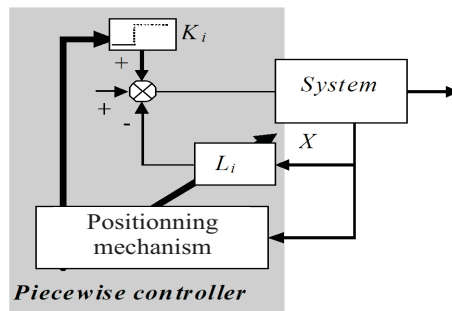
basant sur l'énumération des contraintes actives [65] ou en exploitant la programmation dynamique [66], [67]) pour les problèmes de programmation multiparamétrique, obtiennent une structure affine par morceaux de l'optimum (et par conséquent de la loi de commande explicite résultante) en occultant l'interprétation géométrique. Dans les articles [61] et [68], cette structure est directement liée à l'expression implicitement affine par morceaux des sommets paramétrés.

Un autre avantage de la double représentation du domaine faisable réside dans la représentation intuitive des limites de la région faisable pour les lois de commande basées sur l'optimisation à chaque pas d'échantillonnage [69].

Parmi les implications de ces résultats théoriques dans la synthèse des lois de commande basées sur l'optimisation, on note le passage des problèmes d'optimisation multiparamétriques définis dans un cadre général à des optimisations multiparamétriques avec contraintes *non redondantes* par morceaux [68], [70], [71].

Enfin, par l'intermédiaire d'arguments géométriques (projections, intersections, applications linéaires et autres opérations sur les ensembles polyédraux), les lois de commande explicites obtenues conduisent à une expression équivalente à l'application des séquences optimales de commande selon la philosophie de l'horizon glissant [61], [72].

Pratiquement, la commande du système ne dépend plus d'une routine d'optimisation. On détient une expression analytique sous forme de fonctions linéaires affines par morceaux impliquant le partitionnement de l'espace des paramètres de contexte en sous-régions polyédrales. Ces régions sont stockées dans des tableaux avec les lois affines associées, de sorte que, lors de l'application temps réel, il suffise de se positionner dans ce tableau et d'évaluer la loi linéaire affine trouvée (voir le schéma de principe dans la figure 2).

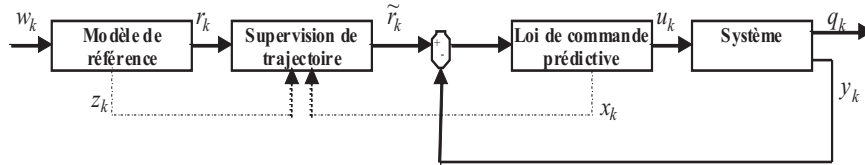


**Figure 2.** Schéma bloc d'une structure de commande prédictive dans la formulation explicite

Les expressions analytiques des lois de commande prédictive ont un impact important dans l'analyse du fonctionnement de la boucle fermée. Ce qu'on a

appelé auparavant dans le cas d'une optimisation en temps réel "faisabilité récursive" revient à l'analyse de stabilité (invariance positive) pour un système affine par morceaux. Deux publications [73] (ou dans la version plus élaborée [74]), [69] ont été dédiées à cette problématique posant les bases d'une des directions de recherche dans la période 2006-2009. Les résultats sortent du cadre classique de formulation MPC garantissant la stabilité [30], [29] par deux caractéristiques essentielles : relaxation des contraintes terminales (non pertinents dans le cas de suivi de trajectoire avec un profil connu sur un horizon glissant) et représentation d'état non-minimale. Dans le cas de régulation vers l'origine ou de façon similaire pour la commande en présence de consignes de type indiciel, ces résultats sont couverts par les théorèmes décrits dans [30], [29].

En liaison directe avec la faisabilité, il a été montré que l'ajout d'un module de gouverneur de référence peut garantir la faisabilité en suivi de trajectoire (voir schéma de principe dans la figure 3). De façon remarquable, le fonctionnement d'un gouverneur de référence peut être traduit à son tour sous la forme d'un problème d'optimisation multiparamétrique [75]. En conjonction avec la loi de commande prédictive on peut obtenir une formulation explicite comme fonction affine de l'état et de la trajectoire à suivre, qui garantit récursivement la faisabilité en adaptant l'action de commande aux limites de faisabilité pour le suivi de trajectoire.



**Figure 3.** Schéma bloc pour le suivi de trajectoire avec garantie de faisabilité par supervision de la référence et optimisation à horizon glissant

Les extensions de l'étude sur les formulations explicites de la commande prédictive en présence d'incertitudes de modèle ont été traitées dans les publications [76], [77]. Dans ce cas, les fonctions de coût quadratiques sont généralement remplacées par des critères à base des normes  $\|\cdot\|_1$  ou  $\|\cdot\|_\infty$  qui ont l'avantage d'être facile à recadrer par l'introduction des variables auxiliaires dans le cadre de la programmation linéaire. Comme le domaine faisable des problèmes d'optimisation linéaire peut toujours être décrit par un polyèdre paramétré, la solution explicite est basée sur l'expression des sommets paramétrés du polyèdre. En conséquence, la loi de commande prédictive explicite sera décrite par des

sommets paramétrés ou par des combinaisons de sommets paramétrés sous la forme d'une fonction linéaire affine par morceaux. Cependant, dès lors que la solution explicite du problème d'optimisation n'est pas unique, il est préférable de sélectionner d'un point de vue pratique une fonction continue linéaire par morceaux. Ce piège des formulations basées sur des normes  $|||_1$  ou  $|||_\infty$  peut conduire à des problèmes de continuité de la loi de commande comme on va pouvoir montrer par la suite.

### **P-3.2 Polyèdres paramétrés, programmation multiparamétrique et formes analytiques pour la commande optimale à horizon glissant - suite**

La thèse [248] a montré que la construction des solutions explicites peut faire appel aux polyèdres paramétrés mais c'est plus tard en [78] que la description de la famille complète des solutions pour un problème de programmation linéaire multiparamétrique va montrer ses avantages. En ayant accès à toutes les combinaisons optimales, on a la liberté de choisir le candidat qui correspond aux desiderata : continuité et faible complexité. Dans l'article [78] il est montré que les solutions existantes dans la littérature peuvent être améliorées du point de vue complexité en exploitant la continuité des sommets paramétrés.

En [79] il est montré que chaque sommet paramétré qui apparaît dans la solution complète peut être représenté par un noeud au sein d'un graphe. En regroupant les noeuds caractérisant la même région, on constitue alors un groupe de noeuds traduisant par leurs combinaisons convexes la famille complète de solutions optimales. Les sommets paramétrés peuvent changer de pente, se dédoubler ou fusionner selon les changements du vecteur de paramètres, mais pour tous ces changements, la continuité est préservée. Trouver une solution optimale continue revient à trouver un chemin qui parcourt tous les faisceaux (donc qui sélectionne au moins un sommet paramétré par région critique). Du point de vue de la complexité, le meilleur chemin sera celui qui parcourt tous les faisceaux avec un nombre minimal de sommets paramétrés. Si la solution est unique, le chemin est un chemin Eulérien.

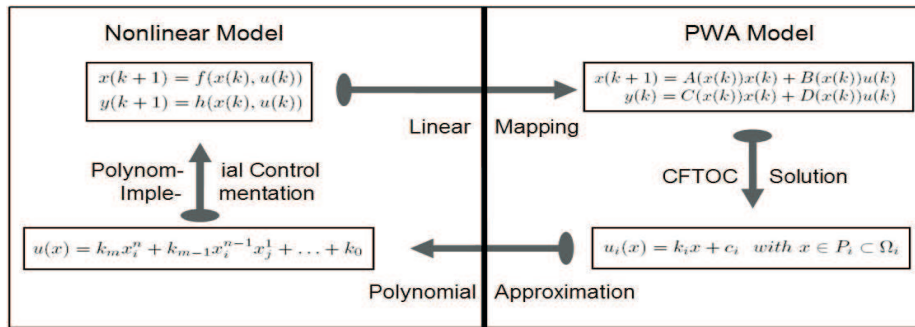
La revue des formulations analytiques pour les problèmes de programmation multiparamétriques à l'aide des polyèdres paramétrés est faite dans l'article de synthèse [80]. Dans cette référence on trouve à côté des rappels des problèmes quadratiques et linéaires sur des variables réelles, une étude sur le cas de l'optimisation en variables entières et variables mixtes. Il est montré qu'en passant par des partitions de type Voronoi, on peut retrouver les solutions sur un alphabet fini, en complétant le tour d'horizon des formulations analytiques des solutions optimales.

Les résultats sur la faisabilité en suivi de trajectoire et les solutions explicites ont été reconduits dans un cadre plus général et publiés dans une version "journal". Les résultats étaient remarquables par la forme compacte des lois de commande obtenues par la composition des fonctions affines par morceaux (avec une comparaison de la complexité dans la forme compacte versus le stockage dans des *look-up tables* séparés). Par rapport aux autres études qui existent

dans la littérature sur des sujets proches (voir [81]) on remarque la généralité de la famille de signaux de référence considérés dans [82] grâce au mécanisme du type "gouverneur de référence".

La recherche sur les solutions explicites pour la commande prédictive réserve encore des problèmes ouverts difficiles. Une direction active dans les années 2005-2007 a été représentée par les travaux orientés sur les cas de contraintes ou des modèles de prédiction non-linéaires. En ce qui concerne les contraintes non-linéaires, dans [83] et [84] une méthodologie de construction des solutions explicites approchées a été développée à base d'une approximation polyédrale des frontières non-linéaires convexes. En ce qui concerne les régions non-convexes, les solutions explicites passent par une distribution des points sur la frontière et l'utilisation des diagrammes de Voronoi pour l'association d'une région correspondante dans l'espace d'état.

Les solutions explicites pour la commande prédictive des systèmes non-linéaires sont construites généralement en passant par une approximation, soit au niveau de la fonction de coût et du domaine faisable soit directement au niveau du modèle de prédiction. Si la première direction s'apparente au traitement des contraintes non-linéaires décrites précédemment, pour la deuxième direction une étude représentative a été publiée en [85]. L'approche est résumée par le schéma présenté dans la figure 4. A partir du modèle dynamique linéaire par morceaux approchant la dynamique non-linéaire, on peut obtenir une solution explicite. Celle-ci représente une solution exacte pour le problème approché et servira comme base pour une interpolation polynomiale qui conduit finalement vers une loi de commande non-linéaire explicite. La procédure a été appliquée [86], [87] dans sa forme analytique pour un système avec une dynamique non-linéaire rapide. Dans le cas où la dynamique permet la résolution d'un problème d'optimisation en temps réel, la solution explicite peut être utilisée pour initialisation ("hot" start).



**Figure 4.** Le schéma bloc pour les solutions explicites dans le cas non-linéaire

Toutes ces formulations explicites visent à étendre le champ d'application du MPC à des situations qui ne peuvent être couvertes de manière efficace avec

l'optimisation temps réel en raison de la complexité des calculs en ligne requis. Une des craintes que l'utilisateur peut avoir est que, pour les systèmes de grande dimension, le codage et la mise en oeuvre de la solution exacte explicite peuvent être trop coûteux pour la capacité matériel disponible. Dans ces cas, les solutions approchées représentent une solution pratique de mise en oeuvre. [267] propose une technique pour calculer une loi PWA qui approche la solution optimale. En outre, cette solution est optimale dans la région qui contient l'origine (pour laquelle aucune contrainte n'est active). Dans les autres sous-régions, le problème du calcul d'une loi de commande sous-optimale comme fonction affine de l'état est lié à un problème important de géométrie assistée par ordinateur : la reconstruction des surfaces. En effet, la technique est basée sur une structure fondamentale de la théorie de la géométrie algorithmique : la tessellation de Delaunay. Celle-ci est appliquée pour toute la région faisable, en interpolant la commande au bord de la région faisable avec la loi de commande sans contrainte correspondant à la région centrale.

Le problème de stabilité de la solution approchée est résolu en introduisant autant de points supplémentaires là où l'approximation de la fonction de coût optimale est la plus éloignée par rapport à celle approchée. Dans [89] il est montré que la stabilité peut être acquise avec un moindre coût, mais la vérification effective passe par la résolution d'un problème d'optimisation non-défini. Enfin, en [90] une procédure basée sur des LMI est montrée comme alternative par le biais de fonctions de Liapunov locales relaxées.

Récemment, [91] repousse les limites de la complexité d'une loi approchée en montrant qu'en renonçant à la continuité, on peut obtenir une loi stabilisante de moindre complexité qui garantit la stabilité. La commande effective est calculée par interpolation de l'action de commande aux sommets de la région faisable complétée avec un mécanisme de commutation de type "patchy" une fois arrivée dans la région invariante contenant l'origine.

### **P-3.3 Commande à base d'optimisation temps réel en présence d'incertitudes**

La construction des solutions explicites pour la commande prédictive robuste est souvent critiquée pour la complexité accrue de la partition de l'espace d'état, de ce fait ne représentant pas une alternative viable à l'optimisation temps-réel. Une des alternatives à la formulation min-max de la commande prédictive est l'utilisation d'une stratégie en deux phases :

- la synthèse dans une forme explicite d'une loi prédictive à partir d'un modèle nominal
- la robustification de cette loi de commande affine par morceaux en utilisant un modèle de bruit affectant le système

Cette approche a été documentée en [92] en mettant l'accent sur une représentation entrée-sortie (GPC) et en utilisant un modèle de bruit obtenu par le biais de la paramétrisation Youla-Kucera des lois de commande stabilisantes pour le cas sans contraintes. Le cas des solutions explicites pour la représentation d'état a été développé en [93] et [94] en soulignant le fait que le modèle de bruit peut être

le résultat d'un problème d'optimisation dans le cas où des critères de sélection sont définis pour la classe des lois de commande stabilisantes.

En renonçant à l'aspect global de la robustification on peut revenir à la phase de conception et essayer d'orienter la synthèse vers l'obtention de lois de commande moins sensibles aux variations paramétriques même pour le cas où la présence des contraintes complique la caractérisation de la région avec garantie de faisabilité récursive (ou de manière équivalente les ensembles positifs invariants). Différentes méthodologies pour calculer une loi de commande prédictive robuste ont été décrites dans la littérature en utilisant les LMI pour garantir un voisinage de l'équilibre avec un comportement stable en dépit de la présence des incertitudes de modèle. En utilisant ces constructions, en [95] une loi de commande robuste est synthétisée en absence de contraintes. Par la suite, lors de la synthèse prédictive, la fonction de coût est choisie (par optimalité inverse) en sorte que la région autour du point d'équilibre soit la loi stabilisante robuste. Par la suite, il est montré que même en travaillant avec un modèle de prédiction nominal, on retrouve une région non-dégénérée qui garantit la faisabilité récursive.

Une comparaison avec des méthodes alternatives de synthèse robuste ou de désensibilisation a été réalisée en [96].

En ce qui concerne la commande prédictive basée sur les LMI, nos recherches ont eu comme point de départ la formulation élégante présentée dans la référence classique [219]. On a pu observer qu'une amélioration essentielle peut être obtenue en considérant des descriptions polytopiques *locales* pour la description de l'incertitude ou pour l'approximation de la non linéarité. Les résultats présentés en [97] et [98] s'inscrivent dans cette direction de conception d'une loi de commande à horizon glissant basée sur un multi-modèle de prédiction. Une des particularités de la description multi-modèle est le caractère non-disjoint de sous-modèles. L'algorithme utilise des fonctions Lyapunov quadratiques pour leurs avantages numériques (résolution de LMIs) et prend en compte les contraintes (potentiellement asymétriques) sur l'entrée de façon récursive pour adapter leur activation selon le sous-modèle approprié. Un avantage non-négligeable de notre approche est l'augmentation de la région faisable (du point de vue MPC) dans l'espace d'état.

En allant plus loin dans la même direction, on a pu montrer [99] et [100] que la complexité du modèle de prédiction peut être adaptée de façon itérative durant le processus de synthèse pour obtenir une meilleure performance surtout dans le cas où la description multi-modèle provient d'une caractéristique non-linéaire, pour laquelle on peut diminuer l'incertitude de modèle en augmentant la complexité de la partition de l'espace d'état indéfiniment. Dans une deuxième phase, une fois que le critère de coût et le modèle de prédiction ont été adaptés aux objectifs envisagés, on a pu se concentrer sur l'aspect *complexité* en proposant une formulation explicite de la loi de commande avec des régions de validité pour chaque gain de retour d'état.

La plupart des constructions des lois de commande prédictive non-linéaire sont basées sur la disponibilité de l'état actuel. Toutefois, dans de nombreuses applications, les états ne sont pas tous directement mesurables. Bien qu'il n'y

ait pas de théorème de séparation applicable de façon générale aux systèmes non linéaires, la synthèse de la commande et les problèmes d'estimation d'état sont généralement traités séparément. L'estimation d'état introduit une charge de calcul supplémentaire qui peut être importante dans le cas de systèmes avec une dynamique relativement rapide. Dans ce cas, une estimation précise avec des méthodes numériques de coût faible est souhaitée, par exemple en utilisant le filtre de Kalman étendu (EKF). De toute évidence, l'EKF ne fonctionne pas bien avec tous les systèmes non-linéaires, mais sa simplicité est une des principales causes de sa popularité. L'étude [101] s'est intéressée à un système décrit localement par un faible indice d'observabilité. Pour ce type de système, on a constaté que l'EKF présente des sauts dans l'estimation à cause des problèmes d'observabilité au point de fonctionnement désiré. La même étude décrit le filtre UKF (Unscented Kalman Filter) et ses similitudes avec le EKF. En outre, il s'avère que le UKF fournit une estimation d'état stable en dépit du fait que le système est localement observable.

### P-3.4 Sur la dynamique des ensembles

Cette sous-section contient un rappel de contributions liées à la construction des ensembles remarquables par rapport à une certaine dynamique. Généralement, il s'agit des dynamiques en temps discret et les concepts qui nous intéressent sont :

- ensemble minimal positivement invariant (en présence de perturbations additives bornées)
- ensemble maximal positivement invariant (par rapport aux contraintes d'état)
- ensembles positivement invariant (minimaux/maximaux) par rapport à la commande
- noyaux de viabilité
- ensembles atteignables

La construction des ensembles positifs invariants est un sujet de recherche qui revient en actualité (voir les travaux de F. Blanchini et les résultats classiques [28], [171]). Les propriétés contractives de la dynamique en temps direct ou expansive de la dynamique en temps inverse seront les éléments de base pour notre approche qui veut identifier les ensembles invariants comme des points fixes pour une dynamique définie sur un ensemble compact de l'espace d'état [102]. Au passage on mentionne que les aspects de convergence en temps fini des itérations sur les ensembles se rapprochent de la théorie classique des ensembles maximaux admissibles par rapport aux contraintes sur les sorties [103]. D'autre part, l'analyse d'atteignabilité [33] et la théorie de la viabilité [35] peuvent être aussi considérées comme domaines proches de la problématique traitée.

Les contributions principales de ce travail de thèse [150] résident dans la construction des ensembles invariants pour les systèmes affines par morceaux PWA définis sur une union de régions polytopiques dans l'espace d'état

$$x_{k+1} = f_{\text{PWA}}(x_k) = A_i x_k + a_i \quad i = 1, \dots, n_r \quad (4)$$



couvrant un ensemble compact de l'espace d'état  $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{n_r} \mathcal{R}_i \subset \mathbb{R}^n$  avec  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $a_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Ce système est défini sur  $n_r$  régions. Dans les articles [104], [105], [106], trois stratégies de construction des ensembles invariants sont développées en se concentrant sur le traitement des systèmes PWA (affines par morceaux) même si les principes sont applicables dans un cadre plus général. Ces approches se distinguent par :

- la construction contractive, utilisant la dynamique directe [104],
- la construction expansive, exploitant la dynamique en temps inverse [105],
- l'utilisation des graphes de transitions entre les régions [106].

Au niveau méthodologique, toutes ces constructions étant basées sur la dynamique directe ou en temps inverse des ensembles de l'espace d'état, elles impliquent un traitement géométrique au moins dans la partie de comparaison avec le domaine faisable qui peut s'avérer gourmand en temps de calcul. Une solution innovatrice a été proposée en exploitant l'analyse par intervalles. Il est intéressant d'observer que la construction des ensembles invariants ouvre la voie au post-traitement des lois de commandes prédictives en vue de la maximisation de leur domaine de fonctionnement avec garantie de sûreté. Accessoirement, le présent travail fait l'état des extensions MPC à base de ces méthodes géométriques pour le suivi de trajectoire [107].

Dans le cas d'un système PWA incertain mais invariant en temps, il a été montré [268] qu'on peut obtenir un ensemble maximal faisable en utilisant une procédure itérative basée sur la dynamique directe du système. Ce résultat trouve une application directe dans l'étude de faisabilité (sûreté de fonctionnement) d'un système en boucle fermée avec une loi de commande prédictive.

Lors de l'étude de la commande prédictive approchée [267], obtenue par l'interpolation entre la valeur de la commande aux frontières du domaine faisable et celle au bord de l'ensemble maximal positif invariant (pour les trajectoires optimales sans contraintes), il a été montré que la complexité de la solution sous-optimale dépend de la complexité du domaine faisable pour la loi de commande prédictive. Dans [109], la réduction de la complexité de cette dernière est considérée par l'élimination successive des sommets tout en gardant les propriétés d'invariance positive.

Pour la classe des systèmes PWA avec commutation, en [110] il a été montré que l'invariance positive des ensembles peut s'avérer une condition forte et que pour cette classe de systèmes le concept d'invariance cyclique est le plus approprié. Cette dernière particularité est liée à la présence de séquences de commutations commandées par rapport auxquelles une certaine région devient invariante, propriété remarquée aussi en [111]. Pour la même classe de systèmes, en [110], il est montré que le calcul itératif de l'ensemble atteignable par rapport à une région cible peut s'avérer non-monotone (la séquence des ensembles peut violer les conditions d'inclusion successive).

Dans [112] plusieurs notions de distances sur la classe de polyèdres (en soulignant les conditions nécessaires pour définir une métrique) sont analysées en relation avec la commande des systèmes sous contraintes.

L'article [113] reprend la construction de  $\epsilon$ -approximations des ensembles invariants robustes minimaux pour les systèmes linéaires en rentrant dans les détails des constructions itératives. En effet, il faut mentionner le fait que les ensembles mRPI (*minimal robust positive invariant*) exacts ne peuvent être obtenus que pour des catégories restreintes de systèmes et, en général, les  $\epsilon$ -approximations sont souvent la solution de repli [114]. Des résultats existants dans la littérature ont été étendus comme suit :

- Une procédure itérative basée sur la contraction (dont procédant de l'extérieur) pour la construction des approximations RPI ;
- La construction d'ensembles invariants qui contiennent une région prédéfinie de l'espace d'état ;
- La description des propriétés mRPI dans le cas de la commutation entre des ensembles convexes de perturbations additives (forme étoilé - *star-shaped*).

Tous ces résultats sont utilisés dans la commande des systèmes multi-capteurs qui doivent faire face à des problèmes spécifiques provenant de la commutation entre les différents estimateurs et de la présence de défauts. La construction de ensembles mRPI fournit dans ce contexte les informations de détection de pannes et assure un fonctionnement tolérant aux défauts.

### P-3.5 Systèmes à retard

Les phénomènes de transmission, transport, transfert et propagation sont naturellement présents au sein des sciences de l'ingénieur pour représenter les effets induits par l'environnement sur le comportement des systèmes dynamiques interconnectés. A l'heure actuelle, les techniques classiques de l'Automatique ne sont pas suffisantes et satisfaisantes pour l'analyse de ce type de phénomènes. Parmi les modèles mathématiques existants pour représenter ces phénomènes, le modèle le plus simple est le *retard*, constant ou variant dans le temps, distribué ou non.

Si, dans certains cas, la présence des retards peut être négligée, et ainsi l'analyse et la conception en grande partie simplifiées, le nombre croissant d'applications utilisant Internet comme environnement (commande des systèmes en réseau) a comme conséquence la nécessité de prendre en compte ce retard et de traiter l'information correctement, notamment lors de la synthèse des stratégies de commande pour améliorer le comportement dynamique des systèmes considérés. En général, la présence de retards est une source d'instabilité en boucle fermée et le problème de commande induit des défis méthodologiques (sensibilité, phénomènes d'interférence ou de « quenching ») et pratiques (mise en oeuvre numérique des lois de commande retardées).

La présence des retards variables en temps est reconnue comme un challenge (qui revient en actualité avec l'intérêt suscité par la commande en réseau [115], [116]). Pourtant, la problématique n'est pas nouvelle, ayant déjà reçu l'attention dans les études des systèmes échantillonnés, à cette époque le phénomène étant connu sous le nom de *jitter* provenait des incertitudes à l'intérieur d'une période d'échantillonnage. Nous nous sommes intéressés dans nos recherche à ce phénomène dans un cadre plus large en proposant une approche systématique

pour la prise en compte des variations du retard dans le canal d'entrée d'un système dynamique. En partant d'un modèle LTI en temps continu affecté par retard variable nous avons montré que la discrétisation nous conduit vers un modèle discret linéaire variant en temps [117]. Cette description n'étant pas convenable pour la synthèse des lois de commande, la solution est de tout reformuler dans un cadre invariant en temps et de couvrir les variations paramétriques par une incertitude polytopique. Cette approche, qu'on va appeler par la suite *embedding*<sup>7</sup> fait appel à plusieurs outils pour exploiter la structure linéaire du système initial en temps continu. En bref, en passant par la décomposition de Jordan de la matrice de transition d'état en temps continu, on peut identifier les modes (valeurs propres et vecteurs propres) qui vont nous conduire à des variations scalaires (dans le cas des valeurs propres réelles) ou dans le plan complexe (dans le cas des valeurs propres complexes conjuguées). Dans [117], le cas des valeurs propres réelles simples a été étudié en exploitant la monotonie de la fonction dépendant du retard variable. Par la suite, les études [118], [119] ont complété l'approche par le cas de valeurs propres complexes et valeurs propres avec multiplicité géométrique différente de la multiplicité algébrique. Il est intéressant de mentionner que dans tous ces cas l'*embedding* recherché était de la plus faible complexité possible et se caractérisait par un simplexe dans l'espace de l'incertitude polytopique. En [118] le conservatisme de l'*embedding* est réduit par l'optimisation<sup>8</sup> de la forme de simplexe autour de sous-approximations obtenues pour des sous-intervalles de variation du retard.

En essayant d'éviter les décomposition de Jordan, en [120] et [121] l'utilisation du Théorème de Cayley-Hamilton à été envisagée, conduisant à des expressions de type simplexe selon des bases de fonctions qui ne font plus la distinction entre les valeurs propres réelles et complexes conjuguées. Finalement, en [121] il a été montré que ces *embeddings* se différencient en fait par une matrice de changement de base des fonctions polynomiales. Pour conclure, dans un récent article de synthèse [122] plusieurs méthodes de construction ont été passées en revue et comparées.

Une fois la modélisation du retard variable accomplie, la synthèse revient à un problème classique de commande robuste. En [117], une méthode basée sur l'utilisation des inégalités matricielles (LMIs) a été explorée dans le contexte de la commande à horizon glissant et raffinée en [95] par l'utilisation de l'optimalité inverse dans la partie de choix de paramètres MPC.

Toutes ces approches de stabilisation pour les systèmes à retard ont le désavantage de travailler dans un espace étendu contenant l'état du système et la séquence des entrées (ou états) retardées. Inutile de mentionner que dans le cas des retards importants ou des périodes d'échantillonnage faibles, la dimension des modèles conduit à la résolution de problèmes LMI de grande complexité. Pour contourner ces difficultés, dans [123], [124] l'utilisation d'une fonctionnelle de

7. Qui doit être traduit par une supra-approximation (polyédrale dans notre cas).

8. La procédure fait appel à la description analytique du volume du simplexe en fonction de ces hyperplans de support et conduit vers un problème de programmation non-linéaire.

Liapunov-Krasovskii a été préconisée avec l'avantage de formuler le problème de stabilisation dans l'espace d'état initial.

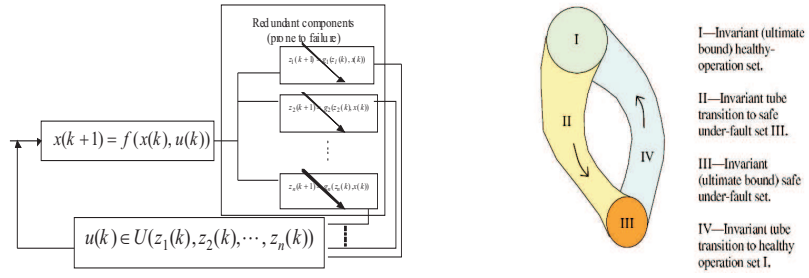
En ce qui concerne la commande en présence de contraintes pour la classe de systèmes affectés par retard, la commande prédictive reste la meilleure candidate, l'étape critique de la synthèse étant la construction des ensembles invariants robustes. Leur construction et manipulation a conduit à la définition de concepts comme *temps maximal d'évasion* pour l'état d'un système par rapport à un ensemble initial [123] à cause des influences des commandes passées.

### P-3.6 Commande tolérante aux défauts se basant sur les méthodes ensemblistes

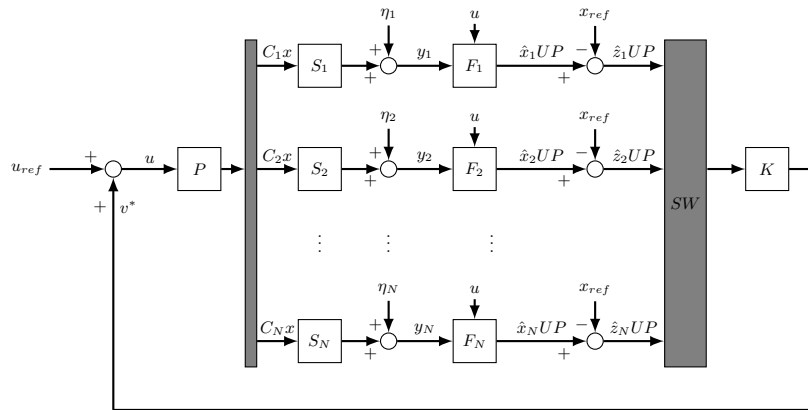
Dans cette direction, l'objectif est de développer un cadre théorique et pratique, orienté vers la conception de systèmes de commande tolérants aux défauts, en exploitant les méthodes ensemblistes. Un projet CARNOT (C3S) a démarré en Novembre 2008, avec le financement d'une thèse (Florin Stoican) sous notre coordination en collaboration avec l'Université de Newcastle en Australie.

Dans notre approche, on considère la connexion en boucle fermée basée sur l'existence des composants (redondants), capteurs par exemple, qui sont prédisposés aux défauts (Figure 5). La complexité de l'analyse d'une part et de la synthèse des lois de commande d'autre part est due aux changements de dynamique en présence des défauts et leur rétablissement. La même figure 5 illustre l'intégration de ces idées basiques, où, pour la simplicité, seulement deux modes opératoires - sain et défectueux - ont été considérés pour un composant isolé. Le domaine I représente un ensemble invariant ; II correspondant à la dynamique du système quand tous les composants sont sains. Quand un composant du système présente un défaut, l'objectif de conception sera de modifier la dynamique affectée par ce défaut afin évoluer le long du tube invariant II et d'atteindre, en conclusion, l'ensemble invariable III qui peut encore être calculé, par exemple, en utilisant les limitations des facteurs incertains correspondant à la dynamique de sous-défaut. Finalement, si les composants se rétablissent (deviennent sains) l'objectif sera d'entraîner leurs dynamiques de rétablissement à évoluer le long du tube invariant IV vers l'ensemble I, qui correspond au fonctionnement sain. Notons un aspect très important du schéma précédent : la conception de la loi de commande peut imposer la structure de l'action de rétroaction et modifier ainsi la topologie des ensembles I - IV.

Les limites ultimes et les ensembles invariants peuvent être calculés en utilisant des méthodes ensemblistes et leur utilisation dans le contexte de la commande tolérante aux défauts a été mise en évidence [113] pour les systèmes multi-capteurs (voir figure 6) qui doivent sélectionner le canal de bouclage tout en assurant une tolérance aux défauts (voir la description de la problématique classique dans la monographie [125]). Pour aller plus loin dans la description des conditions de détection et isolation, dans une étude récente nous avons montré que la commutation entre les différents canaux de rétroaction conduit à des ensembles invariants étoilés pour les estimations associées et que la séparation de ces ensembles assure la stabilité en boucle fermée en présence des défauts [126].



**Figure 5.** Le schéma bloc (gauche) et l'interprétation géométrique (droite)



**Figure 6.** Schéma de principe pour une boucle de commande multi-capteurs

En pratique, l'évolution en temps-réel peut conduire dans un régime de fonctionnement qui ne satisfait pas les conditions de détection<sup>9</sup>. Pour éviter l'utilisation de l'information provenant des sources affectées par les défauts on peut remplacer la trajectoire de référence par la meilleure trajectoire (selon un critère à horizon glissant) qui assure la séparation des ensembles résiduels et garantit la tolérance aux défauts par le biais d'un mécanisme de type "gouverneur de référence" [127].

Si on relaxe l'hypothèse de commutation entre les gains de retour d'état pré-établis, on peut montrer que l'invariance positive peut être recherchée en résolvant un problème d'optimisation à l'étape de synthèse [128]. La procédure de synthèse s'apparente à la construction des ensembles invariants en régime commandé.

Récemment, les conditions de stabilité pour la commutation entre différents canaux capteur-gain-actionneur [129] ont été établies en utilisant le concept de "temps de séjour" (*dwell time*) [130]. Néanmoins, il faut signaler que cette configuration nécessite la construction des ensembles invariants pour des systèmes en commutation, un problème difficile comme le montre l'état de l'art dans la littérature.

Une attention spéciale a été accordée aux stratégies de récupération pour les capteurs considérés antérieurement comme défectueux. Ceci a permis une avancée significative par rapport aux articles existants, les résultats présentés en [253] offrant une description des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour la récupération. Les stratégies ont été reconsidérées et plusieurs méthodes visant l'amélioration de la vitesse de récupération ont été proposées récemment [132].

### P-3.7 La commande des systèmes hybrides

Étant donné que les expressions analytiques (formulations explicites) de la commande prédictive ne peuvent pas être une solution pour les systèmes hybrides complexes [80], l'allégement de la charge de calcul liée à l'optimisation en temps réel a été recherché à l'aide d'algorithmes génétiques [133]. Une adaptation du modèle MLD peut être envisagée, de sorte que les algorithmes génétiques soient applicables à des problèmes d'optimisation quadratiques sur les variables binaires. La transformation des variables continues [134] est basée sur des techniques de type "ensembles flous" qui permettent une adaptation des limitations sur le signal d'entrée pour maintenir les performances de la commande autour d'un point d'équilibre.

Les modèles MLD sont utilisés en [135] pour décrire un système hybride avec l'intégration des phénomènes de type impact (pour des systèmes de jonglage). La synthèse des lois de commande est basée sur l'optimisation temps-réel avec contraintes de type égalité qui fixent les instants de rendez-vous (impact) tout en minimisant l'écart entre la vitesse de référence et la vitesse réelle pour

9. Ceci n'est pas une surprise car le problème est équivalent à la condition d'excitation persistante dans les études d'identification.

le système commandé. Le problème inhérent à l'utilisation des contraintes de type égalité est la sensibilité numérique qui peut conduire vers des situations d'infaisabilité. En plus, l'instant d'impact restant constant dans un repère absolu, pour l'implémentation selon le principe de l'horizon glissant, un changement de structure dans le système des contraintes doit être opéré à chaque pas d'échantillonnage. Pour adresser le problème critique lié à l'infaisabilité, l'introduction des variables de relaxation a été proposée notamment pour les contraintes d'état.

Si les modèles MLD sont bien adaptés pour la synthèse MPC à base de l'optimisation temps réel, les études d'atteignabilité ou les descriptions analytiques des lois de commande peuvent être conduites plus aisément si les dynamiques sont décrites sous une forme affine par morceaux - PWA (avec une partition polyédrale de l'espace d'état ou de l'espace étendu état+entrée).<sup>10</sup> En partant d'une modélisation PWA, avec la particularité de la commandabilité des séquences de commutation entre les différentes sous-modèles, les articles [110], [137] et [138] couvrent le calcul des régions atteignables, la synthèse des lois de commande en présence des incertitudes et introduisent le concept d'invariance cyclique (périodique) comme mentionné précédemment.

Pour la classe de systèmes affines par morceaux (faisant partie de la famille des systèmes hybrides) le problème de certification de stabilité est réputé complexe [139]. La construction des solutions explicites approchées pour la commande prédictive passe par une phase de certification et la complexité de ce processus devient un facteur décisif dans la convergence des algorithmes. Dans [89] l'aspect critique de la vérification est mis en évidence tout en proposant une construction basée sur la résolution d'un problème d'optimisation quadratique indéfini (donc non convexe). Ce travail a représenté le point de départ pour un mécanisme alternatif de vérification, basé sur des fonctions de Liapunov quadratiques locales relaxées [90]. La particularité par rapport aux versions classiques [140] réside dans l'utilisation des fonctions de relaxation concaves centrées à l'intérieur de la région polyédrale faisant l'objet de la procédure de relaxation.

### P-3.8 Applications

De façon délibérée, la présentation des contributions jusqu'à ce point a été faite principalement en suivant les connexions théoriques entre les différentes problématiques. Une certaine partie des résultats reste purement théorique mais un bon nombre d'entre eux soit ont été soulevés par des problématiques industrielles (présentées dans la littérature ou proposées par nos partenaires), soit ont été testés sur des benchmarks de laboratoire ou sur des plate-formes de simulation, ou bien ont fait l'objet de rapports techniques destinés à l'aide à la décision pour nos partenaires industriels.

10. Il a été montré dans [136] qu'il y a, sous certaines conditions, des équivalences entre les différentes représentations des systèmes hybrides, à savoir les MLD, LC, ELC et MMPS.

Une liste de contributions dans des travaux (collaboratif) avec connotation pratique en soulignant le lien avec le résultat théorique correspondant sera présentée de façon succincte par la suite :

- Les stratégies prédictives sous contraintes dans leurs formulations explicites ont été appliquées pour le problème de positionnement d’une machine asynchrone [141]. Les résultats obtenus sont dans la continuation de ceux élaborés dans un cadre sans contraintes dans [142].
- Dans [92] nous considérons dans un cadre applicatif similaire l’asservissement de la position d’un moteur à induction, pour lequel la réjection du bruit de mesure doit être assurée, mais nous nous concentrons sur la robustification à posteriori d’une loi de commande affine par morceaux à 2 degrés de liberté (sous forme de RST).
- La commande prédictive dans une formulation explicite a été synthétisée et appliquée pour un système de type ”suspension magnétique” [87] en utilisant l’interpolation polynomiale à plusieurs variables [85], pour une fonction optimale affine par morceaux. Ainsi, une loi de commande de faible complexité a pu être synthétisée et, par son expression explicite non linéaire, appliquée pour le système non linéaire réel en différentes configurations [86].
- Dans l’article récent [143], une nouvelle application d’automatique industrielle pour les systèmes à grande échelle avec un impact environnemental élevé a été présentée : le système de commande de la ventilation d’une mine (de métaux). La commande de ventilation est essentielle pour l’exploitation d’une mine en sécurité (régulation de  $CO$  et  $NO_x$ ) avec une optimisation de l’énergie. L’article propose une nouvelle architecture de contrôle/commande mettant en évidence l’intérêt d’une approche basée sur un modèle et l’utilisation des capacités de détection distribuées par le biais d’un réseau de capteurs sans fil (WSN). Dans une première phase, un nouveau modèle de ventilation souterraine comprenant les principales composantes de la dynamique (développé par E. Witrant) a été décrit en terme de retards, d’erreurs de transmission, de pertes d’énergie et de profils de concentration. Pour la partie de commande, deux approches de commande basée sur modèle ont été testées, la première faisant appel à la prédiction selon un modèle non linéaire pour la minimisation de l’énergie [144] et la seconde basée sur une description hybride du fonctionnement des ventilateurs, en passant par des techniques d’abstraction.
- Le problème d’affectation d’unités, ou ”Unit Commitment” est un problème d’optimisation mixte classique de la littérature auquel notre collègue G. Sandou a dédié plusieurs études dans le cadre de la gestion des réseaux de chauffage urbain. Il s’agit de déterminer les plannings de marche/arrêt et les quantités d’énergie produites par un ensemble d’installations de production fonctionnant en parallèle et devant satisfaire une demande de consommateurs. Les installations de production doivent satisfaire en outre un ensemble de contraintes techniques, telles que des contraintes de temps minimum de marche et d’arrêt. Le résultat de l’optimisation peut être vu



comme une commande en boucle ouverte du système. Cependant, cette solution est calculée à partir de prédictions des demandes des consommateurs, et son application au système réel peut donc ne pas être satisfaisante. Dès lors, les principes de la commande prédictive (optimisation en ligne, recalage du modèle de prédiction, et horizon fuyant) ont été utilisés pour étendre les résultats d'optimisation au contrôle temps réel du système [265], [264].

- Les réseaux d'oscillateurs synchronisés (qui représentent une alternative à la distribution arborescente du signal d'horloge) dans les "systèmes synchrones à grande échelle sur puces" (large-scale synchronous systems-on-chips) représentent un des sujet de recherche des collègues du département SSE de Supélec. Pour l'étude de stabilité de ces systèmes, on a pu collaborer dans la partie qui concerne l'utilisation des méthodes de type Liapunov basées sur des fonctions-candidates quadratiques pour les modèles PWA. Celles-ci offrent une méthodologie systématique pour la certification du domaine de fonctionnement en se basant sur les routines LMI qui garantissent des bons résultats numériques.
- La commande tolérante aux défauts d'un benchmark d'asservissement de position équipé avec plusieurs capteurs (position, vitesse), qui assure une information redondante concernant l'état du système, a été synthétisée en se basant sur des méthodes ensemblistes et implémentée avec des résultats éloquentes en suivi de trajectoire [147].
- Pour l'optimisation du mécanisme d'ancrage d'un système de forage orientable, un de nos partenaires industriels nous a proposé d'étudier la commande du moteur et de l'optimiser afin d'améliorer le rejet de perturbations et la robustesse face à des vibrations. D'une part, la loi de commande était destinée à minimiser les effets de vibrations et d'autre part elle devait avoir une réponse rapide aux changements majeurs dans la charge. Les résultats ont été délivrés sous la forme d'un rapport technique [148].
- La détermination du domaine de viabilité des offres d'ajustement en infrajournalier pour une vallée hydraulique est un des sujets sur lequel des études ont été conduites récemment, en partenariat avec les chercheurs d'EDF [149]. Le travail concerne la description de ce système hybride sous la forme d'un modèle MLD (Mixed Logical Dynamical) ainsi que sa modélisation à l'aide de l'interface Hysdel. Dans la deuxième partie ont été présentées les méthodes utilisées pour répondre au problème posé, d'abord en construisant un tube de viabilité autour du programme de référence puis en calculant une commande optimale garantissant que l'état du système arrivera dans ce tube (construit à priori en utilisant la programmation dynamique).
- Dans le mémoire [150], l'étude d'un problème de suivi de trajectoire et de faisabilité/viabilité d'un certain profil de production d'électricité pour une vallée hydraulique a été reconduit en utilisant les procédures géométriques exclusivement en temps réel.

- Dans plusieurs articles dédiés à la commande prédictive des systèmes hybrides (voir [134], [133] par exemple), les techniques proposées ont été testées sur un benchmark bien connu dans la littérature, celui de l’asservissement des niveaux dans un système de trois cuves qui présente des vannes pour la commande des canaux de communication/évacuation de type on/off et une/deux entrées continues en débit.
- Le problème du contrôle longitudinal dans les applications automobiles revient à maintenir de façon automatique, dans certaines limites de sécurité, la distance à l’égard d’une voiture leader. Une distance de sécurité doit être conservée par la voiture suiveuse, en réponse aux manoeuvres de la voiture leader tout en maintenant le niveau de confort des passagers. En général, l’inter-distance est mesurée à l’aide de capteurs de différentes technologies, bande passante, précision et niveaux de bruit. Comme exemples, on trouve des capteurs lasers, radars et basés sur la stéréo-vision. Chacun de ces types de capteurs a une bonne performance dans un environnement ou des conditions d’exploitation spécifiques. Toutefois, pendant certaines périodes de temps un capteur pourrait être défaillant ou fonctionner en dehors de ses conditions de spécification. Les systèmes basés sur la vision ne sont pas fiables dans de mauvaises conditions météorologiques, en particulier, la stéréo-vision échoue lorsque la voiture roule à l’intérieur d’un tunnel. D’autre part, les systèmes de radar offrent une information relativement précise et de la robustesse par mauvais temps, mais leurs performances en termes de résolution spatiale est faible. Ainsi, un seul capteur n’est pas suffisant pour fournir des informations fiables pour le guidage de la conduite autonome en temps réel, en raison de conditions météorologiques changeantes, l’éclairage ambiant, et d’autres limitations. Le problème est alors de savoir comment négocier ces difficultés afin de garantir que le système est toujours stable et la performance est encore maintenue dans des valeurs acceptables. Une approche raisonnable est d’utiliser plusieurs capteurs ayant des caractéristiques différentes afin d’améliorer la performance des capteurs individuels et d’obtenir une meilleure estimation de l’état. Une stratégie de commande en commutation proposée en [151], qui sélectionne, à chaque pas d’échantillonnage, le capteur qui fournit les meilleures performances en boucle fermée, telles qu’elles sont prédites par un critère de performances. Les limites de fonctionnement tolérant aux défauts ont été améliorées en [271] et notre étude [113] fournit par le biais de la construction des ensembles minimaux positivement invariants, une  $\epsilon$ -approximation de la séparation implicite entre le fonctionnement défectueux et normal d’un capteur. Plus loin, en [126] l’étude est complétée par les résultats sur la séparation explicite, décrivant les limites ultimes de garantie de tolérance aux défauts qu’on peut prétendre dans le cas de défaillance brutale du capteur et des perturbations bornées.
- La recherche sur le système de jonglage est motivée par de larges applications dans le flux pédestre, les manipulateurs robotique, la marche et le saut des robots, les systèmes mécaniques à impact. Dans [135] la synthèse des

lois de commande est étudiée en utilisant l'optimisation temps-réel avec contraintes et variables de relaxation pour assurer la faisabilité dans le cas d'un système de jonglage, qui se compose d'une balle et d'un robot de jonglage. Ensuite, nous étendons l'étude de simulation pour le cas de plusieurs balles.

- L'un des problèmes classiques pour la validation des méthodes de conception de lois de commande est représenté par le modèle fortement non linéaire d'un réacteur parfaitement agité (*continuous stirred tank reactor*). Celui-ci a été choisi aussi pour l'exemplification en simulation numérique des performances d'une loi de commande prédictive multi-modèle présentée dans [100].
- La synchronisation de mouvements sous contraintes pour des systèmes à retard a été testée en simulation pour deux systèmes robotiques connectés en réseau en [153].

## P-4 Projet de recherche

Les projets immédiates sont liés aux thèses en cours.

- Commande prédictive des systèmes à retard (thèse en cours de W. Lombardi) avec une priorité pour la caractérisation des conditions nécessaires et suffisantes d'invariance [154], la construction effective ensembles invariants positifs et leur utilisation dans une stratégie de commande prédictive en présence des contraintes (entrée + état) avec des garanties de stabilité (voir le problème indirect de faisabilité récursive). L'adaptation des constructions de type Lyapunov-Krasovskii et Lyapunov-Razumikhin pourra assurer que l'optimisation d'un critère de coût sur un horizon glissant conduit indirectement à des preuves de stabilité.
- Commande tolérante aux défauts des systèmes multi-capteurs (thèse en cours de F. Stoican) : l'objectif étant de redéfinir la problématique de la commande tolérante aux défauts dans le cadre de la théorie de la viabilité. Les techniques liées à la théorie de la viabilité sont attirantes pour nos objectifs puisqu'elles sont de nature géométrique et présentent un outil approprié aussi longtemps qu'aucune propriété de continuité n'est exigée. Elles traitent non seulement du comportement asymptotique, mais également des évolutions transitoires et de la capturabilité des cibles dans un temps fini ou prescrit (un aspect utile dans notre description des tubes des transitions).
- Commande collaborative en présence de contraintes de communication (thèse de I. Prodan) : étude des interconnexions des composants des systèmes dynamiques complexes (en particulier, ceux commandés par un réseau de communication) afin de prendre en compte le comportement des systèmes naturels ou artificiels face aux contraintes physiques (dites de viabilité).
- Synthèse prédictive de lois de commande hybrides de type " patchy " (thèse de N. Nguyen) : délocalisation d'une partie de la charge de calcul temps réel vers des procédures hors ligne (solution explicites), considérant

également la problématique de faisabilité (aspect important pour la sûreté de fonctionnement).

- Commande prédictive MPC pour la télé-opération (thèse de B. Liacu) : en partant de la constatation qu'une des structures généralement mises en place dans les systèmes de télé-opération est la structure maître-esclave, l'objectif de ce travail est de définir une stratégie permettant de concilier la transparence avec les performances en faisant appel à des éléments de commande prédictive pour utiliser toute l'information disponible concernant les modèles et l'environnement lors du calcul de l'action corrective.
- Tolérance aux défauts introduits par le retard dans les systèmes dynamiques (thèse de N. Stankovic) : les retards de transmission seront classés en tant qu'incertitudes paramétriques pour des faibles variations autour d'une valeur supposée comme valeur nominale. Pour des variations importantes, ils sont signalés comme défauts et une reconfiguration de la structure de communication est mise en place.

Plus loin, la connexion entre la commande prédictive et la commande optimale a fait couler beaucoup d'encre et va rester un domaine actif car la stabilité de la commande prédictive revient souvent aux origines de la commande optimale et à la programmation dynamique. Dans le cas des modèles non-linéaires avec retard, il est connu que la stabilité sera liée à la construction des ensembles invariants positifs à l'aide de la commande pour les systèmes à retard.

Pour certaines classes des applications, la théorie des systèmes monotones va offrir des pistes pour l'étude des systèmes coopératifs. Une limitation de la théorie des systèmes monotones vient du fait qu'elle est contrainte à des équations différentielles ordinaires. De façon surprenante, il y a peu de résultats dédiés à l'extension de la théorie des systèmes monotones pour les systèmes avec retard. Notamment, l'extension des résultats obtenus pour les systèmes à retard aux systèmes NCS (Networked Control Systems) présente un grand intérêt. On peut partir de l'hypothèse que des sous-systèmes NCS possèdent la propriété d'être monotones (ou présentent des propriétés de coopération) et mettre l'accent sur l'enjeu de l'invariance positive : en effet, la théorie des systèmes monotones nous permet d'aller plus loin que la construction des solutions positives : elle peut être utilisée pour obtenir des résultats plus profonds d'invariance. Cette étude pourrait commencer par la recherche des conditions garantissant l'invariance de polyèdres pour les systèmes linéaires continus avec un retard. Les résultats d'invariance seront ensuite utilisés pour la conception de lois de commande prédictives qui peuvent exploiter les conditions d'invariance lors de l'étape d'optimisation temps réel.



## Synthèse des travaux récents

Dans cette dernière partie du mémoire HDR seront présentés des résultats récents (publiés après la soutenance de thèse en Septembre 2005) sur une partie des sujets mentionnés dans le projet de recherche décrit dans la section précédente.

La structuration en quatre parties veut créer un aspect homogène pour les thématiques traitées, même si les résultats sont généralement issus d'une compilation de plusieurs publications.

Les sujets traitent de la commande des systèmes dynamiques sous contraintes et de l'interaction optimisation-géométrie-commande comme suit :

- Les polyèdres paramétrés et la commande prédictive
- Des méthodes numériques pour la commande prédictive de systèmes hybrides
- Des méthodes géométriques pour la modélisation et la commande des systèmes à retard
- Une approche ensembliste pour la commande tolérante aux défauts

L'analyse des polyèdres paramétrés est présentée comme un problème de géométrie avec des implications multiples dans la commande prédictive sous contraintes dans le cas linéaire et hybride. Spécifiquement pour la commande prédictive des systèmes hybrides, des approches alternatives basées sur l'adaptation du modèle de prédiction en vue de l'exploitation des routines d'optimisation évoluées (algorithmes génétiques, etc.) ont été développées. Les outils géométriques sont utilisés aussi dans des problèmes plus éloignés de la commande prédictive comme le cas de la modélisation des systèmes affectés par un retard variable. Ici, les techniques géométriques permettent la description des modèles linéaires polytopiques qui peuvent être utilisés par la suite dans une procédure de synthèse de lois de commande robuste (et prédictive accessoirement). Finalement, dans un tout autre domaine, celui de la commande des systèmes multi-capteurs, on montre que les méthodes ensemblistes peuvent apporter des réponses pour les défis de détection et isolation des défauts. Quant à la commande prédictive, elle offre le cadre approprié pour la reconfiguration, l'autre aspect majeur de ce qu'on appelle communément "la conception d'un système de commande tolérant aux défauts".

Chacune de ces sections contient un résumé en français, l'équivalent en anglais puis présente un ensemble de paragraphes développant les outils théoriques et proposant les résultats associés.

Une dernière étape de cette partie du mémoire apporte les perspectives à ces travaux, en soulignant les directives ouvertes par le projet de recherche.

Avant de laisser la place aux contributions effectives, nous mentionnons que la bibliographie est commune à toute cette partie du manuscrit.

# ***Partie I : Une vision géométrique fondée sur les polyèdres paramétrés pour les problèmes d'optimisation en commande prédictive***

## **Résumé :**

Cette partie du manuscrit rappelle les fondamentaux de la commande basée sur la résolution des problèmes d'optimisation en temps réel (connus aussi sous le nom de "lois de commande prédictive" - MPC). Nous montrons que, pour les modèles de prédiction d'état avec caractéristiques invariantes, la présence des contraintes sur les variables d'état et l'action de commande conduisent à un problème d'optimisation paramétrique. L'analyse géométrique de l'ensemble des contraintes peut être faite en se basant sur le concept de *polyèdres paramétrés*.

Cette vision géométrique permet une étude directe des contraintes linéaires sur l'état et la commande. La formulation des lois classiques MPC est fondée sur l'échantillonnage à chaque étape de minimisation d'une fonction de coût quadratique qui pénalise l'effort de commande et pondère les performances en suivi de trajectoire. Les avantages qui découlent de cette formulation sont l'unicité et la continuité de l'optimum comme une fonction d'état [203].

Après avoir examiné les résultats du cas quadratique (MP-QP), une partie importante de l'étude est consacrée à l'approche géométrique pour la caractérisation des solutions de problèmes d'optimisation linéaires paramétriques (MP-PL). L'intérêt pour cette classe de problèmes et les formulations explicites de l'optimum peut être trouvé dans les problèmes avec des contraintes de commande et critère de coût non-quadratique [218] (généralement construits sur un indice de performance qui utilise les normes 1 et  $\infty$  au lieu de la norme 2). Nous montrons comment la double description possible de la région permet d'accéder à toute la famille des solutions optimales en tant que fonction décrite sur l'espace des paramètres. En outre, les conditions de continuité et d'optimalité seront détaillées.

La construction hors-ligne de solutions explicites est traitée dans le cas de la commande prédictive sous contraintes non linéaire. L'approche proposée ici est également géométrique, basée sur l'exploitation de la topologie du domaine faisable. La loi de commande linéaire par morceaux est obtenue avec un certain degré de sous-optimalité imposé par la linéarisation ou la décomposition sur une certaine classe de fonctions. Les techniques présentées sont directement liées à la distribution de points extrêmes sur la frontière du domaine faisable en utilisant les diagrammes de Voronoï.

Les contributions liées à l'utilisation des polyèdres paramétrés et les techniques géométriques dans la commande prédictive ont été introduites en [248] et les publications suivantes :

S. OLARU, I. DUMITRACHE, D. DUMUR, "Geometrical Analysis of Model Predictive Control. A Parameterized Polyhedra Approach", volume 5434 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 439-446. Springer, (2008).

S. OLARU, D. DUMUR, I. DUMITRACHE "On the continuity of control laws based on multiparametric linear programming", 13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation, Paris - Cachan, France, 26 - 28 April 2006. Published also in the International Journal of Tomography and Statistics, Vol. 5, No. W07, 2006, pp. 50-55.

S. OLARU, D. DUMUR, "Commande prédictive sous contraintes", La Commande Prédictive - Édition Hermès (Coordinateurs P. Boucher, D. Dumur), 2006.

S. OLARU, S. DOBRE, D. DUMUR, "On the geometry of predictive control with nonlinear constraints", Informatics in Control, Automation and Robotics IV, Filipe, J. ; Ferrier, J.-L. ; Cetto, J.A. ; Carvalho, M. (Eds.) Springer 2008.

S. OLARU, D. DUMUR, "On the Continuity and Complexity of Control Laws Based on Multiparametric Linear Programs", 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, USA, December 2006.

Nous présentons dans ce chapitre une compilation de ces 5 articles.



# Geometrical insight on the predictive control optimization problems. A Parameterized Polyhedra Approach.

**Résumé** The present chapter deals with the receding horizon optimal control schemes. The presence of input and state constraints is shown to lead at the implementation stage to the resolution of a parametric optimization problem. A geometrical analysis of the set of constraints can be done using the concept of parameterized polyhedra.

In the case of linear systems subject to linear constraints, the conventional MPC minimizes at each sampling period a quadratic cost function constructed as a weighting between the tracking error and the control effort. An advantage declined from the quadratic formulation is the uniqueness of the optimal solution and further its continuity as a function of the system state [203].

An important part of the study is dedicated to the geometrical approach for the multiparametric linear programs (mp-LP). The interest for this topic is motivated by the need for explicit formulations in the constrained predictive control (with non-quadratic cost indexes [218]). It is shown how the double description of the feasible domains can offer access to the entire family of optimal mappings from the parameters space to the arguments space. Further the explicit solutions with guarantee of continuity and optimality are studied.

The off-line construction of the explicit solution is addressed also for the predictive control laws in the presence of nonlinearities in the constraints description. The proposed approach is a geometrical one, based on the topology of the feasible domain. The resulting piecewise linear state feedback control law has to accept a certain degree of suboptimality, as it is the case for local linearizations or decompositions over families of parametric functions. In the presented techniques, this is directly related to the distribution of the extreme points on the frontier of the feasible domain.

## I-1 Introduction

The philosophy behind Model-based Predictive Control (MPC) is to exploit in a "receding horizon" manner the simplicity of the Euler-Lagrange approach for the optimal control. To be more specific, the control action  $u_t$  at state  $x_t$  is obtained from the control sequence  $\mathbf{k}_u^* = [u_t^T, \dots, u_{t+N-1}^T]^T$  obtained as a result of the optimization problem :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{k}_u} \quad & \varphi(x_{t+N}) + \sum_{k=0}^{N-1} l(x_{t+k}, u_{t+k}) \\ \text{subj. to : } & x_{t+1} = f(x_t) + g(x_t)u_t; \\ & h(x_t, \mathbf{k}_u) \leq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

constructed for a finite prediction horizon  $N$ , cost per stage  $l(\cdot)$ , terminal weight  $\varphi(\cdot)$ , the system dynamics described by  $f(\cdot), g(\cdot)$  and the constraints written in a compact form using elementwise inequalities on functions linking the states and the control actions,  $h(\cdot)$ .

The control sequence  $\mathbf{k}_u^*$  is optimal for a single initial condition -  $x_t$  and produces an open-loop trajectory which contrasts with the need for a feedback control law. This drawback is overcome by solving the local optimization (5) for every encountered (measured) state, thus indirectly producing a state feedback law. The overall methodology is based on computationally tractable optimal control problems for the states found along the current trajectory. However, two important research directions are active in order to enlarge the class of systems which can take advantage of the MPC methodology

- The measurements can be available faster than the optimal control sequence becomes available (as output of the optimization solver) and thus important information can be lost with irreversible consequences on the close-loop performances. This leads to the interesting issues of the MPC application for *fast systems* which can be seen also as a part of the topic of *optimisation in the loop*.
- The lack of a closed form expression for the feedback law notifies about the difficulties that can be encountered when considering properties such as stability, typically established for restrained regions in the state space. This leads to the concern for the *basin of attraction*, *invariant sets of viability* characterisation of the systems controlled by predictive techniques.

For the optimization problem (5), the current state serves as an initial condition and influences both the objective function and the feasible domain :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_u^*(x_t) = \min_{\mathbf{k}_u} \quad & F(x_t, \mathbf{k}_u) \\ \text{subj. to : } & \begin{cases} C_{in}(\mathbf{k}_u, x_t) \leq 0 \\ C_{eq}(\mathbf{k}_u, x_t) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

The system state can be interpreted as a vector of parameters, and the problems to be solved are part of the multiparametric optimization programming family. From the cost function point of view, the parametrization is somehow easier to deal with and eventually can be entirely translated towards the set of constraints. Unfortunately, similar observation cannot be made about the feasible domain and its adjustment with respect to the parameters evolution (the MPC literature contains references to schemes based on suboptimality and to algorithms restraining the demands to feasible solution of the receding horizon optimization [269]).

The optimal solution is often influenced by the limitations, the process being forced to operate at the designed constraints for best performance. The distortion of the feasible domain during the parameters evolution will consequently affect the structure of the optimal solution. Starting from this observation our study focuses on the topological analysis of the domains described by the MPC constraints.

The structure of the feasible domain is depending on the model and the set of constraints taken into consideration in (5). If the model is a linear system, the presence of linear constraints on inputs and states can be easily expressed by a system of linear inequalities. In the case of nonlinear systems, these properties are lost and the domains are in general nonconvex and difficult to handle. There are several approaches to transform the dynamics to those of a linear system over the operating range as for example by piecewise linear approximation, feedback linearisation or the use of time-varying linear models.

As a consequence, specific attention for the linear constraints and the associated polyhedral feasible domains may be prolific. More than that, in the class of convex sets, the use of polyhedral domains is not hazardous since they offer important advantages, like the closeness over the intersection or the fact that the polyhedral invariant sets (largely used for enforcing stability) are less conservative than the ellipsoidal ones for example. More than that, any convex and compact set is known to be approximated within a  $\epsilon$  approximation by a finitely generated polytope see R. Schneider and J. A. Wieacker, "Approximation of convex bodies by polytopes" Bulletin London Mathematical Society, vol. 13, no. 2, pp. 149-156, 1981.

In the current paper, these polyhedral feasible domains will be analyzed with a focus on the parametrization leading to the concept of parameterized polyhedra [240] :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_u^*(x_t) &= \min_{\mathbf{k}_u} F(x_t, \mathbf{k}_u) \\ \text{subj. to :} & \quad \begin{cases} A_{in}\mathbf{k}_u \leq b_{in} + B_{in}x_t \\ A_{eq}\mathbf{k}_u = b_{eq} + B_{eq}x_t \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

where the objective function  $F(x_t, \mathbf{k}_u)$  can be either linear, quadratic or other nonlinear type.

Secondly it will be shown that the optimization problem may take advantage during the real-time implementation either from the possible alleviation of the set of constraints for the on-line optimization routines either from the construction of the explicit solution on geometrical basis when possible. With these two aspects, one can consider that MPC awareness is improved both from the theoretical (insight on the global control law) and practical (computational aspects) point of view.

## I-2 From polyhedral domains to parameterized polyhedra

A mixed system of linear equalities and inequalities defines a polyhedron [238]. It can be represented in the dual (Minkowski) formulation :

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{k}_u \in \mathbb{R}^p \mid A_{eq} \mathbf{k}_u = b_{eq}; A_{in} \mathbf{k}_u \leq b_{in}\} \iff \mathcal{P} = \underbrace{\text{conv.hull}\mathbf{V} + \text{cone}\mathbf{R} + \text{lin.space}\mathbf{L}}_{\text{generators}} \quad (8)$$

where  $\text{conv.hull}\mathbf{V}$  denotes the set of convex combinations of vertices  $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\vartheta\}$ ,  $\text{cone}\mathbf{R}$  denotes nonnegative combinations of unidirectional rays

in  $\mathbf{R} = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_\rho\}$  and  $lin.space\mathbf{L} = \{\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_\lambda\}$  represents a linear combination of bidirectional rays (with  $\vartheta$ ,  $\rho$  and  $\lambda$  the cardinals of the related sets). This dual representation in terms of generators can be rewritten as :

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{k}_u = \sum_{i=1}^{\vartheta} \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{\rho} \beta_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{\lambda} \gamma_i \mathbf{l}_i; 0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum_{i=1}^{\vartheta} \alpha_i = 1, \beta_i \geq 0, \forall \gamma_i \right\} \quad (9)$$

with  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  the coefficients describing the convex, non-negative and linear combinations in (8). Numerical methods like the Chernikova algorithm are implemented for constructing the double description, either starting from constraints (8) either from the generators (9) representation.

### I-2.1 The parametrization

A *parameterized polyhedron* [224] is defined in the implicit form by a finite number of inequalities and equalities with the note that the affine part depends linearly on a vector of parameters  $x \in \mathbb{R}^n$  for both equalities and inequalities :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x) &= \left\{ \mathbf{k}_u(x) \in \mathbb{R}^p \mid A_{eq} \mathbf{k}_u = B_{eq}x + b_{eq}; A_{in} \mathbf{k}_u \leq B_{in}x + b_{in} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{k}_u(x) \mid \mathbf{k}_u(x) = \sum_{i=1}^{\vartheta} \alpha_i(x) \mathbf{v}_i(x) + \sum_{i=1}^{\rho} \beta_i \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{\lambda} \gamma_i \mathbf{l}_i \right\} \\ 0 &\leq \alpha_i(x) \leq 1, \sum_{i=1}^{\vartheta} \alpha_i(x) = 1, \beta_i \geq 0, \forall \gamma_i. \end{aligned} \quad (10)$$

This dual representation of the parameterized polyhedral domain reveals the fact that only the vertices are concerned by the parametrization (resulting the so-called *parameterized vertices* -  $\mathbf{v}_i(x)$ ), whereas the rays and the lines do not change with the parameters' variation (a property easy to prove by their definitions). In order to effectively use the generators representation in (10), several aspects have to be clarified regarding the parametrization of the vertices : which is the analytical form of dependencies in the parameter vector  $x$ , how to express it, which is the validity domain of each vertex, etc. The answers are well documented in the literature of computational geometry and related fields (see for example [224] and the geometrical toolbox POLYLIB [282]).

The basic idea is to identify the parameterized polyhedron with a non-parameterized one in an augmented space :

$$\tilde{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p+n} \mid [A_{eq} \mid -B_{eq}] \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} = b_{eq}; [A_{in} \mid -B_{in}] \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} \leq b_{in} \right\} \quad (11)$$

The original polyhedron in (10) can be found for any particular value of the parameters vector  $x$  through  $P(x) = \text{Proj}_{\mathbf{k}_u} \left( \tilde{\mathcal{P}} \cap H(x) \right)$ , for any given hyperplane

$H(x_0) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p+n} \mid x = x_0 \right\}$  and using  $\text{Proj}_{\mathbf{k}_u}(\cdot)$  as the projection from  $\mathbb{R}^{p+n}$  to the first  $p$  coordinates  $\mathbb{R}^p$ .

Within the polyhedral domains  $\tilde{\mathcal{P}}$ , the correspondent of the parameterized vertices in (10) can be found among the faces of dimension  $n$ . After enumerating these  $n$ -faces :  $\{F_1^n(\tilde{\mathcal{P}}), \dots, F_j^n(\tilde{\mathcal{P}}), \dots, F_\varsigma^n(\tilde{\mathcal{P}})\}$ , one can write :  $\forall i, \exists j \in \{1, \dots, \varsigma\}$  s.t.  $[\mathbf{v}_i(x)^T \ x^T]^T \in F_j^n(\tilde{\mathcal{P}})$  or equivalently :

$$\mathbf{v}_i(x) = \text{Proj}_{\mathbf{k}_u} (F_j^n(P) \cap H(x)) \quad (12)$$

From this relation it can be seen that not all the  $n$ -faces correspond to parameterized vertices. However it is still easy to identify those which can be ignored in the process of construction of parameterized vertices based on the relation :  $\text{Proj}_x (F_j^n(\tilde{\mathcal{P}})) < n$  with  $\text{Proj}_x(\cdot)$  the projection from  $\mathbb{R}^{p+n}$  to the last  $n$  coordinates  $\mathbb{R}^n$  (corresponding to the parameters' space). Indeed the projections are to be computed for all the  $n$ -faces, those which are degenerated are to be discarded and all the others are stored as validity domains -  $D_{\mathbf{v}_i} \in \mathbb{R}^n$ , for the parameterized vertices that they are identifying :

$$D_{\mathbf{v}_i} = \text{Proj}_n (F_j^n(\tilde{\mathcal{P}})) \quad (13)$$

Once the parameterized vertices identified and their validity domain stored, the dependence on the parameters vector can be found using the supporting hyper-planes for each  $n$ -face :

$$\mathbf{v}_i(x) = \begin{bmatrix} A_{eq} \\ \bar{A}_{in_j} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{eq} \\ \bar{B}_{in_j} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{eq} \\ \bar{b}_{in_j} \end{bmatrix} \quad (14)$$

where  $\bar{A}_{in_j}$ ,  $\bar{B}_{in_j}$ ,  $\bar{b}_{in_j}$  represent the subset of the inequalities, satisfied by saturation for  $F_j^n(\tilde{\mathcal{P}})$ . The inversion is well defined as long as the faces with degenerate projections are discarded.

### I-2.2 The interpretation from the predictive control point of view

The double representation of the parameterized polyhedra offers a complete description of the feasible domain for the predictive control law as long as this is based on a multiparametric optimization with linear constraints. Using the generators representation, with simple difference operations on convex sets one can compute the region of the parameters space where no parameterized vertex is defined :

$$\aleph = \mathbb{R}^n \setminus \{\cup D_{\mathbf{v}_i}; i = 1 \dots \vartheta\} \quad (15)$$

representing from the MPC point of view, the set of infeasible states for which no control sequence can be designed due to the fact that the limitations are overly constraining. As a consequence the complete description of the infeasibility is obtained.

From a qualitative point of view, expressing the feasible domain in terms of vertices, rays and lines can bring a useful insight to the predictive control law.

The rays and lines are not affected by the parametrization and thus represent unconstrained directions towards which the optimization routine can search for the minimum of the cost function using linear or positive combinations.

*Remark :* the presence of rays and lines in the set of generators doesn't imply that the infeasibility is avoided. The feasibility is strictly related with the existence of valid parameterized vertices for the given value of the parameter (state) vector.

The vertices of the feasible domain cannot be expressed as convex combinations of other distinct points and, due to the fact that from the MPC point of view, they represent sequences of control actions, one can interpret them in terms of extremal performances of the controlled system (for example in the tracking applications the maximal/minimal admissible setpoint [243]).

The constraints redundancy can be avoided by exploiting the fact that *every inequality must be saturated by at least  $p$  vertices/rays*. If a adjacency matrix is available the property can be verified by simple inspection.

### I-2.3 Regular feasible domains and the link with constraints redundancy

The problem of redundancy can influence the performance of the multiparametric optimization routines. When the feasible domains are described as parameterized polyhedra, the redundancy has to be characterized with respect to the parameters space. Indeed one can distinguish constraints which are redundant globally (for all possible parameters) in the sense that by extracting them from (10) the domain  $\mathcal{P}(x)$  suffers no modification. In contrast with global redundancy one can observe also a local redundancy that can be interpreted from the dual description point of view as in the following definitions.

**Definition 1.** A parameterized polyhedron (10) is defined locally over  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  by a regular set of constraints if the set of non-redundant constraints remains constant for all  $x \in \mathcal{D}$ .

**Definition 2.** The polyhedral domain is said to have a regular shape locally over  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  if the set of parameterized vertices remains constant for  $x \in \mathcal{D}$ .

Even if these two definitions are theoretically equivalent, it is practically difficult to deal with the constraints redundancy as long as there is no a priori knowledge about the regions in the parameters space where they become redundant. On the contrary as showed in the relation (13), each parameterized vertex  $\mathbf{v}_i$  is defined over a certain validity domain  $D_{\mathbf{v}_i}$ . Thus, by their juxtaposition, a cutting of the parameters space in zones with regular shapes  $R_1, \dots, R_{n_r} \in \mathbb{R}^n$  can be performed [241]. Knowing that for the feasible parameters it corresponds at least a parameterized vertex, one can write the simple relation between the validity domains and the regions with regular shape :

$$\cup D_{\mathbf{v}_i} = \cup R_j; \quad i = 1 \dots \vartheta; \quad j = 1 \dots n_r \quad (16)$$

The parametric optimization performances can take advantage of this partition of the parameters space in zones with regular shape. One can restate the problem in terms of a look-up table of problems with a non-redundant set of constraints (Table 1). The non-redundant sets of inequalities are uniquely defi-

**Table 1.** Equivalence between the original optimization and the one based on piecewise redundancy-free sets of constraints

$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{k}_u} & F(x_t, \mathbf{k}_u) \\ \text{subj. to :} & \begin{cases} A_{in} \mathbf{k}_u \leq b_{in} + B_{in} x_t \\ A_{eq} \mathbf{k}_u = b_{eq} + B_{eq} x_t \end{cases} \end{array}$	$\iff$	$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{k}_u} & F(x_t, \mathbf{k}_u) \\ \text{if } x_t \in R_1 & \text{subj. to :} \begin{cases} A_{in_1} \mathbf{k}_u \leq b_{in_1} + B_{in_1} x_t \\ A_{eq} \mathbf{k}_u = b_{eq} + B_{eq} x_t \end{cases} \end{array}$
		$\dots$
		$\begin{array}{ll} \min_{\mathbf{k}_u} & F(x_t, \mathbf{k}_u) \\ \text{if } x_t \in R_\rho & \text{subj. to :} \begin{cases} A_{in_\rho} \mathbf{k}_u \leq b_{in_\rho} + B_{in_\rho} x_t \\ A_{eq} \mathbf{k}_u = b_{eq} + B_{eq} x_t \end{cases} \end{array}$

ned by the pairs  $(A_{in_i}; B_{in_i}; b_{in_i})$  for each convex region  $R_i$  based on the valid parameterized vertices for the same region.

A singularity of the parameterized polyhedra approach is the design freedom offered for the granularity of the parameter's space partitioning. This is an important advantage and it can be seen as a compromise between the implementation schemes based exclusively on on-line optimization routines on one hand and the evaluation of the explicit solution found off-line on the other hand. Sometimes a mixture of these two techniques might improve the computational time. The scheme in table 1, with cuttings of the parameters space corresponding to simpler optimization problems can offer the freedom in choosing the right balance between positioning mechanisms and on-line solvers, according to the available memory and computational power.

### I-3 Towards explicit solutions. Quadratic cost function.

The case of a quadratic cost function is one of the most popular at least for the linear MPC. The explicit solution based on the exploration of the parameters space ([169], [174], [278]) is extensively studied lately. Alternative methods based on geometrical arguments or dynamical programming ([203], [270]) improved also the awareness of the explicit MPC formulations. The parameterized polyhedra can serve as a base in the construction of such explicit solution [240], for a quadratic multiparametric problem :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_u^*(x_t) &= \arg \min_{\mathbf{k}_u} \mathbf{k}_u^T H \mathbf{k}_u + 2 \mathbf{k}_u^T F x_t \\ \text{subject to } & A_{in} \mathbf{k}_u \leq B_{in} x_t + b_{in} \end{aligned} \quad (17)$$

In this case the main idea is to consider the unconstrained optimum :

$$\mathbf{k}_u^{sc}(x_t) = H^{-1} F x_t$$

and its position with respect to the feasible domain given by a parameterized polyhedron as in (10).

If a simple transformation is performed :

$$\tilde{\mathbf{k}}_u = H^{1/2} \mathbf{k}_u$$

then the isocost curves of the quadratic function are transformed from ellipsoid into circles centered in  $\tilde{\mathbf{k}}_u^{sc}(x_t) = H^{-1/2} F x_t$ . Further one can use the Euclidean projection in order to retrieve the multiparametric quadratic explicit solution.

Indeed if the unconstrained optimum  $\tilde{\mathbf{k}}_u^{sc}(x_t)$  is contained in the feasible domain  $\mathcal{P}(x_t)$  then it is also the solution of the constrained case, otherwise existence and uniqueness are assured as follows :

**Proposition :** For any exterior point  $\tilde{\mathbf{k}}_u(x_t) \notin \mathcal{P}(x_t)$ , there exists an unique point characterized by a minimal distance with respect to  $\tilde{\mathbf{k}}_u^{sc}(x_t)$ . This point satisfies :

$$(\tilde{\mathbf{k}}_u^{sc}(x_t) - \tilde{\mathbf{k}}_u^*(x_t))^T (\tilde{\mathbf{k}}_u - \tilde{\mathbf{k}}_u^*(x_t)) \leq 0, \forall \tilde{\mathbf{k}}_u \in \mathcal{P}(x_t) \square$$

The construction mechanism uses the parameterized vertices in order to split the regions neighboring the feasible domain in zones characterized by the same type of projection. In figure (1) a simple example is given starting from the parameterized polyhedron  $\mathcal{P}$  in the extended dimension (a), the regions with the same type of projection are found (b) and finally the explicit solution in terms of a piecewise linear function of parameters is given (c).

*Remark :* The use of these geometrical arguments makes the construction of explicit solution to deal in a natural manner with the so-called *degeneracy* [169]. This phenomenon is identified by the parameters' values where the feasible domain changes its shape (the set of parameterized vertices is modified).

#### I-4 Towards explicit solutions. Linear cost function.

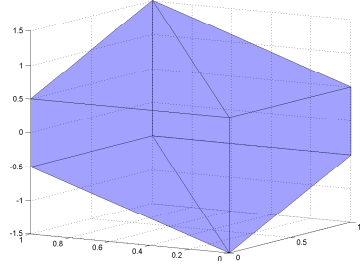
For linear systems with polytopic constraints the MPC laws can be designed using linear programs (derived from norm  $\|\cdot\|_1$  or  $\|\cdot\|_\infty$  based cost functions). These can be proved to be the adequate choice, for example in the case when the disturbances are to be taken into account. The problem to be solved is then equivalent to the construction of the set :

$$J^*(x) = \min_{z \in \mathbb{R}^m} \{ c^T z \mid A_{in} z \leq b_{in} + B_{in} x, x \in X \subset \mathbb{R}^n \} \quad (18)$$

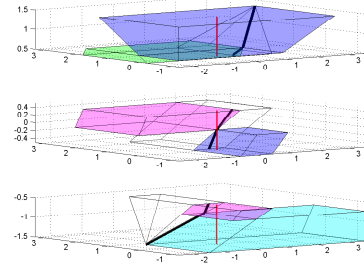
with  $X$  the polytopic region in the parameters space where the control law has to be characterized.

The continuity of the explicit solutions is a sensitive aspect. Control laws will represent a practical advantage if the control action presents no jumps on the frontiers of the critical regions. When the optimal solution is not unique, the methods in [175] allow discontinuities as long as during the exploration of the parameters space, the optimal basis is chosen arbitrarily. This fact was already observed in [272], where a method for continuity reinforcement is proposed by appealing to an quadratic program with an equivalent satisfaction degree as the initial LP (the uniqueness of the solution will guarantee the overall continuity).

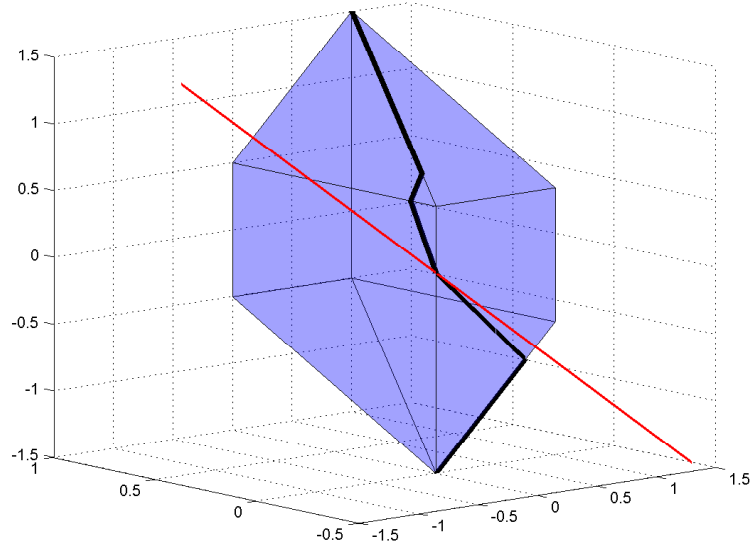




(a) A feasible domain as a parameterized polyhedron



(b) The neighboring zones with different projection laws



(c) Explicit solution as a piecewise linear function

**Figure 7.** From the feasible domain as a parameterized polyhedron to the explicit solution

#### I-4.1 Complete explicit solution for a mp-LP

For the problem (18), one can use the parameterized vertices and their piecewise linear dependence on the parameters to construct the optimal solution [242]. Indeed, if it exists and is bounded, it will correspond to a point on the frontier of the feasible domain. The next result resumes this idea :

**Proposition 1 :** The solution of a MPLP optimization problem is characterized by :

- a) If there exists a bidirectional ray  $l$  such that  $c^T l \neq 0$  or an unidirectional ray  $r$  such that  $c^T r \leq 0$ , then the minimum is unbounded ;
- b) For all the regions of the parameter space where the dual representation of the feasible domain does not contain any valid parameterized vertex, the problem is infeasible ;
- c) If all bidirectional rays  $l$  are such that  $c^T l = 0$  and all unidirectional rays  $r$  are such that  $c^T r \geq 0$  then the space of feasible parameters  $D$  can be partitioned in critical regions  $D = \bigcup R_k$  (with  $R_k$  - non-degenerate polyheral regions in  $\mathbb{R}^n$ ) such that the minimum :

$$\min \{c^T v_i(x) | v_i(x) \text{ vertex of } P(x) \text{ valid over } R_k\} \quad (19)$$

is attained by a constant subset of vertices of  $P(x)$ , denoted  $v_i^*(x)$ . The complete solution over  $R_k$  is :

$$S_k(x) = \text{conv.hull} \{v_{1k}^*(x), \dots, v_{s_k k}^*(x)\} + \text{cone} \{r_1^*, \dots, r_p^*\} + \text{lin.space} P(x) \quad (20)$$

where  $\text{conv.hull}\{\cdot\}$  represents the set of convex combinations of vertices  $v_{ik}^*(x)$ ,  $\text{cone}$  corresponds to the nonnegative combinations of unidirectional rays  $r_i^*$  satisfying  $c^T r_i^* = 0$  and  $\text{lin.space} P(x)$  refers to the linear combination of bidirectional rays if they exist.<sup>11</sup>  $\square$

It can be observed that the complete optimal solution takes into account the eventual non-uniqueness of the optimum, and it defines the entire family of optimal solutions using the parameterized vertices and their validity domains.

#### I-4.2 A structural representation

It can be observed that cases a) and b) of the previous proposition can not correspond to a well posed predictive control law as long as this late one will be either unbounded, either infeasible.

Consider now the case of mp-LP with bounded feasible domains (no uni or bidirectional rays between the generators in (20)). The complete explicit solution will be given as a union of polyhedral domains  $D = \bigcup R_k$  and for each critical region  $R_k$  :

$$S_k(x) = \text{conv.hull} \{v_{1k}^*(x), \dots, v_{s_k k}^*(x)\} \quad (21)$$

Before introducing a formal representation of this family of piecewise affine functions, a preliminary result regarding the structure of the polyhedral partitions of the parameters space can be stated.

**Theorem 1 :** Let the multiparametric program in (18) and  $v_i(x), i = 1, \dots, n_v$  the parameterized vertices of the feasible domain (10-14) with their correspondent validity domains  $VD_i$ . If a parameterized vertex takes part in the description of the optimal solution for a region  $R_k$ , then it will be part of the family of optimal solution over its entire validity domain  $VD_i$ .

11. In the equation (20) the parameterized vertices entering in the convex combinations for the region  $R_k$  are numbered 1.. $s_k$ , with  $s_k$  the number of vertices attaining the minimum in (19).

**Proof :** Consider the polyhedral domain :

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n} \mid [A_{in} - B_{in}] \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \leq b_{in} \right\} \quad (22)$$

and a subspace of  $\mathbb{R}^{m+n}$ , characterized by a specific critical region  $x \in R_k = \{x \mid Cx \leq d\}$  and which can be written as :

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n} \mid [0 \ C] \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \leq d \right\} \quad (23)$$

Suppose there exist a parameterized vertex  $v_{ik}^*(x) = K_i x + \kappa_i$ , the points found on it are optimal with respect to the given linear cost function  $f(z) = cz$  for  $x \in R_k$  and in the same time there exists  $x_0 \in VD_i \setminus R_k$  such that  $v_{ik}^*(x)$  is not optimal. This supposition can be rewritten :

$$\forall \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \in P \cap D, cz \geq c(K_i x + \kappa_i) = cK_i x + c\kappa_i \quad (24)$$

$$\exists \begin{bmatrix} z_0 \\ x_0 \end{bmatrix} \in P \text{ s.t. } \begin{bmatrix} K_i x_0 + \kappa_i \\ x_0 \end{bmatrix} \in P \wedge cz_0 < cK_i x_0 + c\kappa_i \quad (25)$$

As mentioned at point c) of Proposition 1, the critical regions  $R_k$  are non-degenerated and thus one can choose  $x_1 \in \text{int } R_k$  and show that  $\exists \alpha \in [0, 1]$  sufficiently small such that  $x_2 = \alpha x_0 + (1 - \alpha)x_1 \in R_k$ . Now,  $\forall \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \in P$ , due to the convexity of the polyhedral set  $P$ , one has

$$\begin{bmatrix} z_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} z_0 \\ x_0 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \in P \quad (26)$$

By taking  $z_1 = cK_i x_1 + c\kappa_i$  and evaluating the cost function for  $z_2$  one can obtain :

$$cz_2 = c(\alpha z_0 + (1 - \alpha)z_1) = \alpha cz_0 + (1 - \alpha)(cK_i x_1 + c\kappa_i) \quad (27)$$

and by further replacing (25) :

$$cz_2 < cK_i x_2 + c\kappa_i \quad (28)$$

which is in contradiction with (24).  $\square$

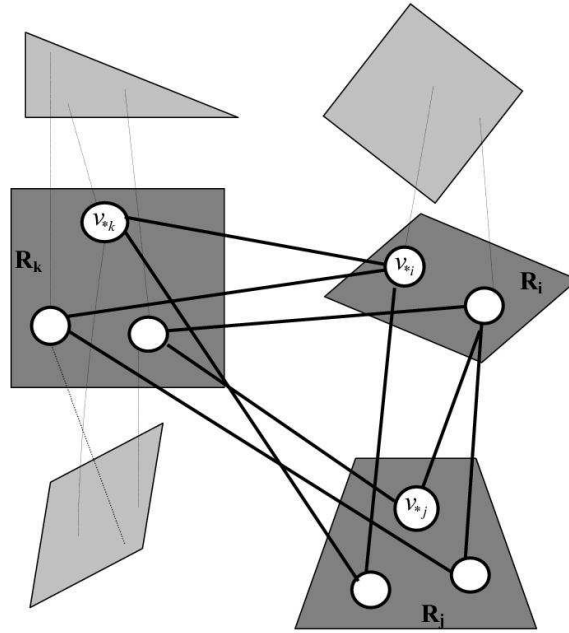
In order to have a structural representation for (21), one can appeal to a graph representation. The complete explicit solution can be assimilated to a triplet  $\Sigma = \{\mathcal{T}, \Gamma, \Lambda\}$  :

A  $\mathcal{T}$  is the set of nodes. Each node corresponds to a parameterized vertex which appears in the description of the optimal solution for a critical region  $R_k$ . Due to the fact that the validity domain of a parameterized vertex can be larger than a critical region, a vertex could generate several nodes, according to the number of regions covered by its validity domain.

- B  $\Gamma$  is the set of clusters in the graph  $\Sigma$ . Each cluster corresponds to a critical region  $R_k$  and it groups the subset of nodes in  $\mathcal{V}$  - corresponding to the parameterized vertices in the optimal solution.
- C  $A$  is the set of edges of the graph. An edge joins an (unordered) pair of nodes for which the continuity of the associated parameterized vertices is assured. As a first consequence, edges can exist only between nodes in adjacent critical regions.

*Remark :* Each cluster characterizes an empty subgraph. Indeed the clusters consist of  $s_k$  isolated nodes with no edges (no continuity between the optimal parameterized vertices on a critical region).

Formally, each parameterized vertex  $v_{*k}(x)$  appearing in the complete explicit solution can be represented as a node of a graph (Fig. 1). Then, by regrouping the nodes which characterize the same region  $R_k$  one can obtain clusters of nodes which form by their convex combinations the entire family of optimal solution.



**Figure 8.** mpLP solution as a graph of parameterized vertices. Nodes, edges, clusters.

As mentioned previously, the vertices of the feasible domain split, slope and merge. The changes occur with a preservation of the continuity. This aspect is

emphasized in the graph representation by the presence of edges between the nodes representing adjacent parameterized vertices.

*Remark :* The sets of parameterized vertices over the critical regions are not disjoint and thus the same parameterized vertex can originate nodes in several clusters (its validity domain covers several critical regions). The different nodes originated by the same parameterized vertex will be linked by edges, the continuity being obvious.

### I-4.3 Continuous candidates

Given the analogy between the family of explicit solutions (20), and an undirected graph one can go further and identify the desirable qualities for the candidate solutions (and the additional effort to discriminate them).

First of all, the uniqueness of the optimal solutions is equivalent to the presence of a single node in each cluster. In this case, there is no decision to be made, the explicit solution being the collection of the parameterized vertices identifying the nodes of the graph (affine functions of parameters identifying the nodes of the graph) and their validity domains. The continuity is intrinsic.

Conversely, the presence of several nodes in a cluster enriches the family of optimal solutions :

$$\begin{aligned} z_k(x) &= \alpha_{1k}(x)v_{1k}^*(x) + \dots + \alpha_{s_k k}(x)v_{s_k k}^*(x) \\ \alpha_{ik} &\geq 0, i = 1, \dots, s_k k; \sum_{i=1}^{s_k k} \alpha_{ik} = 1 \end{aligned} \quad (29)$$

passing to an infinite number of candidates (any function included in the convex combination of nodes being optimal). Their continuity is a crucial property and it can be lost in two cases :

- A due to the discontinuity of one of the functions  $\alpha_{ik}(x)$ ;
- B due to a discontinuity on the borders of  $R_k$ .

Choosing the right compromise between the need for a *simple-to-construct* continuous candidate can be challenging.

In a first stage a simple method for avoiding the type 1 discontinuities can be studied by supposing that :

$$\alpha_{\theta_k k}(x) = 1 \quad \text{for } x \in R_k \quad (30)$$

with  $\theta_k \in \{1, \dots, s_k\}$ . In other words it is considered that for each  $R_k$  the explicit solution will be represented by one of the parameterized vertices, thus obtaining a piecewise affine, for which the continuity problems can exist only on the borders of the critical regions.

Returning to the analogy between the family of solutions and the triplet  $\Sigma$ , the hypothesis (30) comes to the retention of one node per cluster. The global continuous candidates can be identified by traveling along edges and covering all the clusters. The next result assures the non-blocking property and the existence of solution from every initial node.

**Proposition 2 :** Each parameterized vertex in a cluster corresponding to the region  $R_k$  has at least one adjacent node in the clusters associated to the  $R_k$  neighbor regions.

**Proof :** If the parameterized vertex is valid in the neighboring region then the existence of an adjacent node is obvious. A parameterized vertex can loose its optimality beyond its validity domain but this phenomenon is associated with a change on the set of nonredundant constraints. Each neighboring region will contain a node for a parameterized vertex which reflects the change in the set of saturated constraints, and by consequence the continuity is assured.

The construction of continuous solutions follow the steps :

**Algorithm 1 :**

- A For each cluster  $\gamma \in \Gamma$  find the set of neighbor clusters  $N(\gamma) \in \Gamma$ .
  - (a) Choose a node  $v \in \gamma$ ;
  - (b) Store in  $N(\gamma)$  all the clusters with at least a node connected by an edge to  $v$ ;
- B Set  $\Phi = \emptyset$  (the set of explored clusters),  $\Omega = \Gamma$  (the set of clusters to be explored) and  $S = \emptyset$ ;
- C Choose a cluster  $\gamma \in \Omega$
- D While  $\Omega \neq \emptyset$ 
  - (a)  $\Omega = \Omega \setminus \gamma$
  - (b)  $\Phi = \Phi \cup \gamma$
  - (c) Choose a node  $v \in \gamma$  and verify the existence of an edge from  $v$  to each node in  $S$
  - (d)  $S = S \cup v$
  - (e) Store the parameterized vertex corresponding to the node  $v$  and its validity domain as part of the continuous explicit solution
  - (f) Choose a cluster  $\gamma \in N(\phi)$  with  $\phi \in \Phi$

#### I-4.4 Continuity and complexity

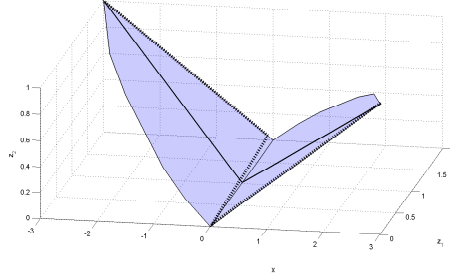
The sensitive part of this algorithm is the step 4c. The algorithm assures the continuity but this choice will have an impact on the complexity of the candidate solution. In the following the complexity will be understand in terms of the number regions of the parameters space.

If the idea from [272] is used, then the choice of the node has to be made by operating a (quadratic) optimization on the local optimal solutions. From the point of view of complexity, such a choice does not offer a particular advantage, the number of partitions being related to the structure of the quadratic index to be minimized.

In order to diminish the number of partitions in the parameters space, an improved technique is to cover *the maximal number of clusters with a minimal number of parameterized vertices*. Indeed, from the Theorem 1, if a parameterized

vertex is selected as a local optimal candidate then it covers all its validity domain. Thus, practically, the parameterized vertices covering several critical regions have to be prioritized. This can be done by allocating important weights for the corresponding nodes in view of the decision at the step 4c of the algorithm.

*Remark :* The improvements obtained in terms of complexity are remarkable under the given conditions. However, it can be observed that the choice of parameterized vertices with large validity domains can be in contradiction with the hypothesis (30). By relaxing it, one can construct directly a low-complexity solution, and reinforce its continuity by creating a passing zone from a parameterized vertex to another (Fig. 2).



**Figure 9.** Example of reduced complexity solutions. (Dotted line) - By forcing the continuity between the parameterized vertices with large validity domains. (Solid line) By introducing new nodes (piecewise linear functions of parameters) in the graph.

*Remark :* Relaxing the hypothesis (30) may open the way to the introduction of new nodes in a given cluster. Each node introduced has to respect the connection conditions with nodes in the neighbor clusters. If these continuity requirements are fulfilled for the new nodes, algorithm 2 can be applied for retrieving continuous candidates with low complexity (Fig. 2).

#### I-4.5 Example 1

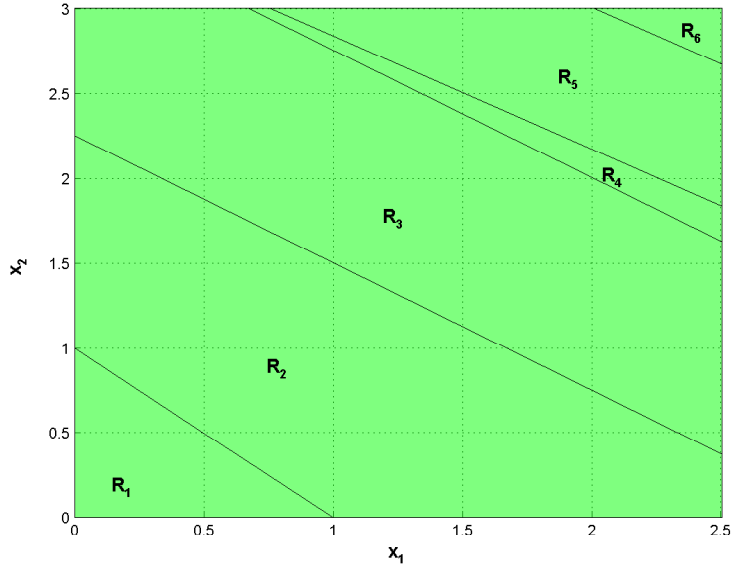
Consider a mpLP as in [272] :

$$\begin{aligned} J^*(x) &= \min_{z \in \mathbb{R}^3} \{ c^T z \mid A_{in} z \leq b_{in} + B_{in} x, x \in X \} \\ c &= - [1 \ 1 \ 1]^T ; \\ b_{in} &= [10 \ 4 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3]^T ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{in}^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \\
B_{in}^T &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
X &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 2.5; 0 \leq x_2 \leq 3\}.
\end{aligned}$$

**The complete solution** The generators description of the feasible domain is given by the convex hull of 23 parameterized vertices. No uni or bidirectional rays exist. The complete solution for the multiparametric linear problem will be constructed by comparing the parameterized vertices and their validity domains<sup>12</sup>. Between the 23 parameterized vertices, only 10 can be retrieved in the optimal combinations.

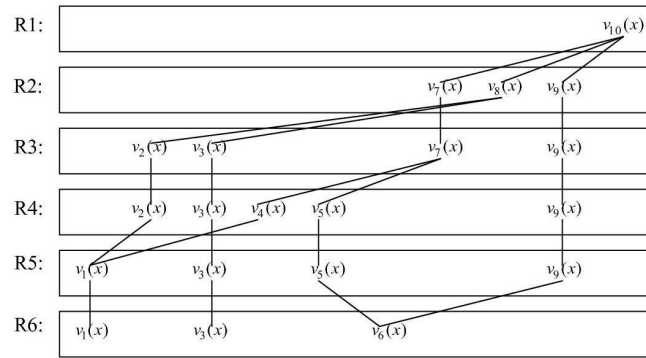
The feasible region can be observed in (Fig. I-4.5) as well as the 6 regions with specific families of optimal solutions. Figure I-4.5 presents the distribution of the optimal parameterized vertices in each region  $R_1 \dots R_6$  using an equivalent representation as a graph.



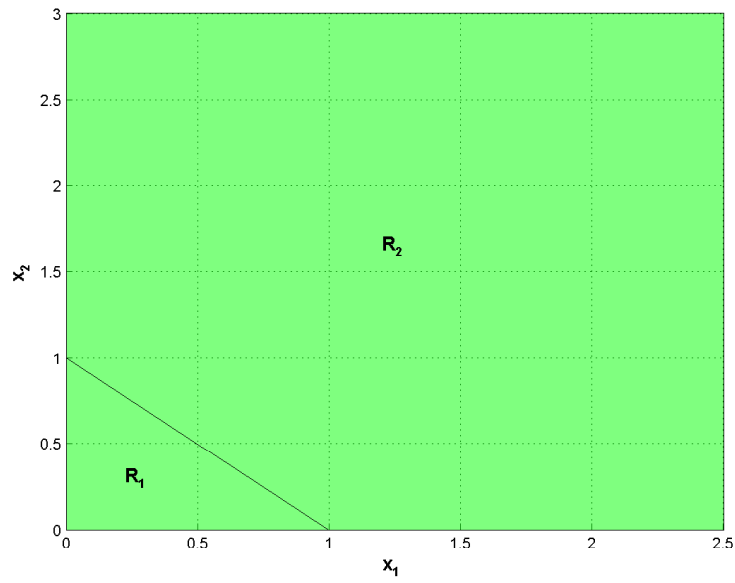
**Figure 10.** Partitions for different families of solutions.

12. The double representation of parameterized polyhedra was obtained using POLYLIB [254]





**Figure 11.** The parameterized vertices describing the optimum.



**Figure 12.** The critical regions for the solution with a reduced complexity

**Continuous solutions. Complexity** If the choice of explicit solution is restrained at the combinations of parameterized vertices, one can dispose of a total of 720 possibilities to cover the feasible domain. All these combinations assure the optimality but only 5 of them correspond to continuous solutions, identified by the possible paths from  $R_1$  to  $R_6$  in Fig. I-4.5. The edges in the graph are corresponding to continuous connections between the parameterized vertices due to adjacency properties.

The algorithm of [175] chooses arbitrarily the optimal basis and thus the solution :

$$v_{10}(R_1) \rightarrow v_8(R_2) \rightarrow v_7(R_3) \rightarrow v_3(R_4 \cup R_5 \cup R_6)$$

is not continuous due to discontinuities between  $v_8, v_7, v_3$ . The algorithm in [272] can find one of the 5 continuous solutions, namely :

$$v_{10}(R_1) \rightarrow v_7(R_2 \cup R_3) \rightarrow v_5(R_4 \cup R_5) \rightarrow v_6(R_6)$$

but it appears that solutions with lowest number of partitions exist. By applying the Algorithm 1 with high priority on vertices  $v_3$  and  $v_9$  (the parameterized vertices with validity domain which cover four critical regions) :

$$v_{10}(R_1) \rightarrow v_9(R_2 \cup R_4 \cup R_5) \rightarrow v_6(R_6)$$

$$\text{or } v_{10}(R_1) \rightarrow v_8(R_2) \rightarrow v_3(R_3 \cup R_4 \cup R_5 \cup R_6)$$

This proves that the construction of the complete solution can offer access to the continuous optimal candidates with decreased complexity.

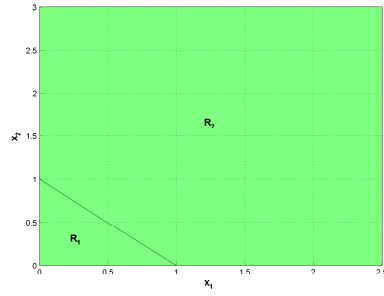
Further, if instead of looking for the optimal solution exclusively on the graph of parameterized vertices, the entire family of solutions can be explored. One can obtain the explicit optimal solution with only 2 critical regions as shown in Fig. 13(a) by creating a supplementary node, valid over the clusters  $R_2 \dots R_6$ .

#### I-4.6 Example 2

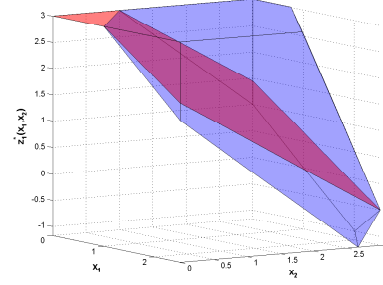
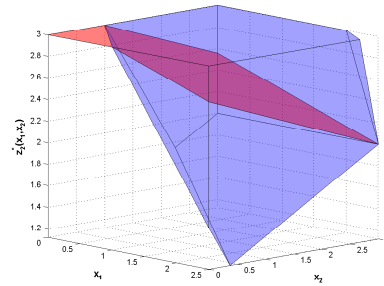
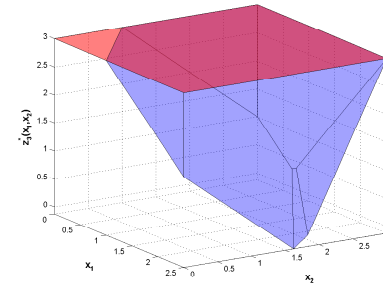
Consider a mp-LP as in [175] with non-unique primal solution :

$$\begin{aligned} J^*(x) &= \min_{z \in \mathbb{R}^2} \{ c^T z \mid A_{in} z \leq b_{in} + B_{in} x, x \in X \} \\ c &= - \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T; b_{in} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \\ A_{in}^T &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \\ B_{in}^T &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ X &= \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid -10 \leq x_1 \leq 10; -10 \leq x_2 \leq 10 \}. \end{aligned}$$

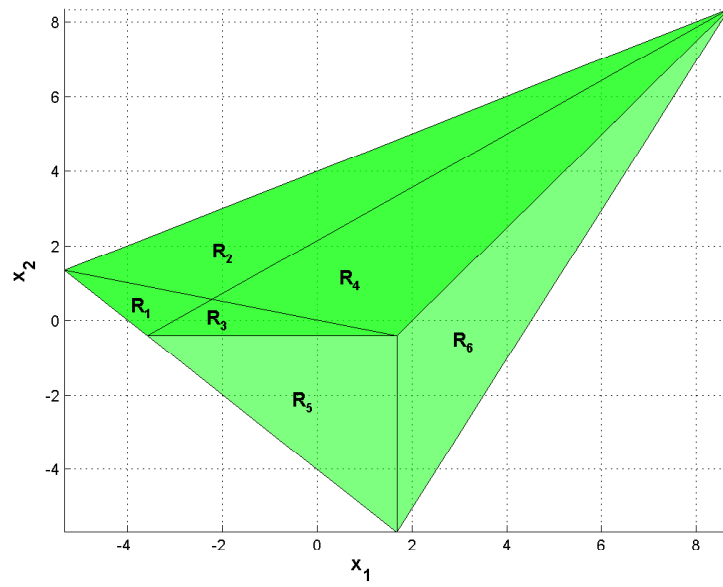
In this case, the feasible domain is given by a parameterized polyhedron with 9 parameterized vertices. The optimum is not unique and for the description of the complete optimal solution only 6 vertices will be retained. The partition in regions with specific families of optimal solutions is given in Fig. I-4.6, whereas



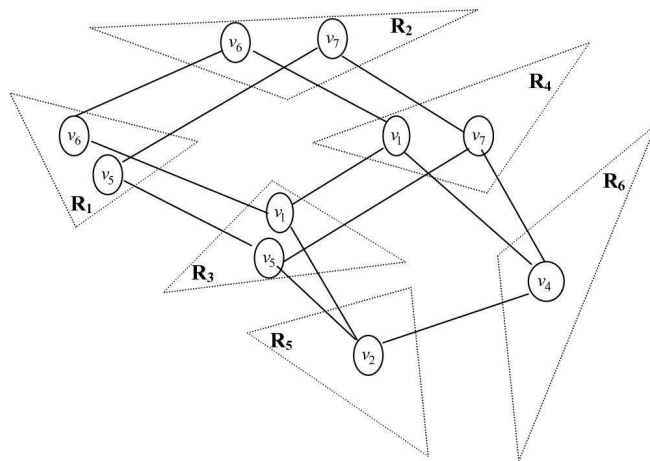
(a) The critical regions

(b)  $z_1^*(x_1, x_2)$ (c)  $z_2^*(x_1, x_2)$ (d)  $z_3^*(x_1, x_2)$ 

**Figure 13.** Critical regions and the explicit solution with a minimal number of partitions.



**Figure 14.** Partitions for different families of solutions.



**Figure 15.** The parameterized vertices describing the optimum.

I-4.6 presents the graph of parameterized vertices and their continuous connections.

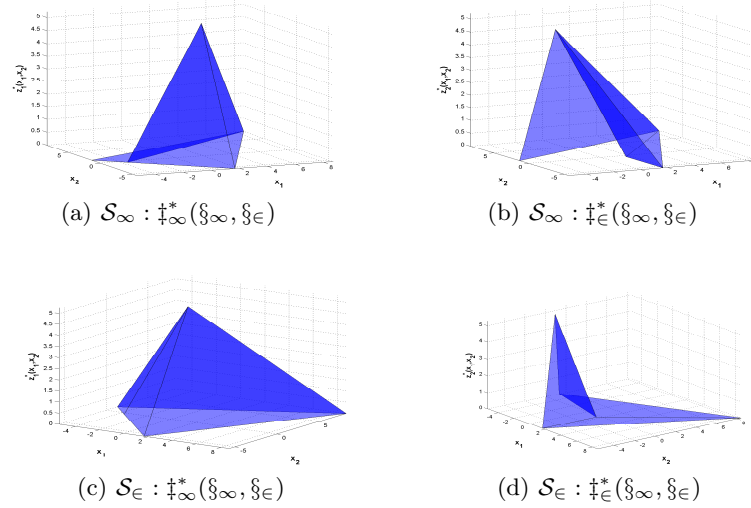
There are two paths for covering the domain :

$$\mathcal{S}_1 = \{v_2(R_5); v_4(R_6); v_1(R_3 \cup R_4); v_6(R_1 \cup R_2)\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{v_2(R_5); v_4(R_6); v_5(R_1 \cup R_3); v_6(R_2 \cup R_4)\}$$

represented graphically in figure 16(a)-16(b) and 16(c)-16(d). The geometry of the family of optimal solutions assures that the number of partitions cannot be further reduced (even by introducing new nodes in the graph of optimal solutions, these can not cover larger number of regions).

It is interesting to observe the importance of step 4f of the Algorithm 1. If the cluster  $\gamma$  is chosen to be only in  $\Omega$  and not between the neighbors of the already explored clusters, the threatening of a discontinuous solution is important.



**Figure 16.** The explicit optimal solution  $\mathcal{S}_\infty; \mathcal{S}_\epsilon;$

## I-5 Handling Nonlinearities

Consider now the case of mixed type of constraints (linear/nonlinear) :

$$\mathbf{k}_u^* = \arg \min_{\mathbf{k}_u} 0.5 \mathbf{k}_u^T H \mathbf{k}_u + \mathbf{k}_u^T F x \quad (31)$$

$$\begin{cases} h(x, \mathbf{k}_u) \leq 0 \\ A_{in} \mathbf{k}_u \leq b_{in} + B_{in} x \end{cases}$$

An important point to note is the quadratic form of the cost function which offers interesting structural properties (convexity, uniqueness of the unconstrained optimum) and corresponds to *"sum of squared error weighted by (norm 2) control effort"*.

### I-5.1 Optimality Conditions for Nonlinear Constraints

Let  $\bar{x}$  be a feasible parameter vector. The KKT optimality conditions can still be formulated as :

– Primal feasibility :

$$\begin{cases} h(\bar{x}, \mathbf{k}_u) \leq 0 \\ A_{in} \mathbf{k}_u \leq b_{in} + B_{in} \bar{x} \end{cases} \quad (32)$$

– Dual feasibility :

$$\begin{cases} H\mathbf{k}_u + F^T \bar{x} + A_{in}^T \mu + \nabla_{\mathbf{k}_u} h(\bar{x}, \mathbf{k}_u)^T \nu = 0 \\ \mu \geq 0, \nu \geq 0 \end{cases} \quad (33)$$

– Complementary slackness :

$$[\mu^T \nu^T] \begin{bmatrix} A_{in} \mathbf{k}_u - B_{in} \bar{x} - b_{in} \\ h(\bar{x}, \mathbf{k}_u) \end{bmatrix} = 0 \quad (34)$$

The difference resides in the fact that the KKT conditions are only necessary and not sufficient for optimality due to the presence of nonlinearity.

### I-5.2 The Topology of the Feasible Domain

Indeed the sufficiency is lost due to the lack of constraint qualification (the Abadie constraint qualification holds automatically for the linear constraints but needs additional assumptions for the nonlinear case, see the next theorem).

**Theorem (KKT sufficient conditions) [203] :** Let  $x = \bar{x}$  and the associated feasible domain  $\mathbf{U}(\bar{x})$  be a nonempty set in  $\mathbb{R}^{N_y m}$  described by the constraints in (31), with  $h_i(\bar{x}, \mathbf{k}_u) : \mathbb{R}^{N_y m} \rightarrow \mathbb{R}$ , the components of  $h(\bar{x}, \mathbf{k}_u)$ . Let  $\mathbf{k}_u^* \in \mathbf{U}(\bar{x})$  and let  $\mathcal{I} = \{i : h_i(\bar{x}, \mathbf{k}_u^*) = 0\}$ ,  $\mathcal{J} = \{j : A_{in_j} \mathbf{k}_u^* - B_{in_j} \bar{x} - b_{in_j} = 0\}$ . Suppose the KKT conditions hold, such that :

$$H\mathbf{k}_u^* + F^T \bar{x} + \sum \mu_j A_{in_j}^T + \sum \nu_i \nabla_{\mathbf{k}_u} h_i(\bar{x}, \mathbf{k}_u^*)^T = 0 \quad (35)$$

If  $h_i$  is quasiconvex at  $\mathbf{k}_u^*$  for  $i \in \mathcal{I}$ , then this is a global solution to the problem (31)  $\square$

Due to these problems, up to date, the explicit solutions for the general nonlinear multiparametric programming case were not tackled. Only for convex nonlinearities approximate explicit solutions were proposed [204].

In the following a solution based on linear approximation of feasible domains is proposed. This will answer the question regarding the optimality of a solution with piecewise linear structure.

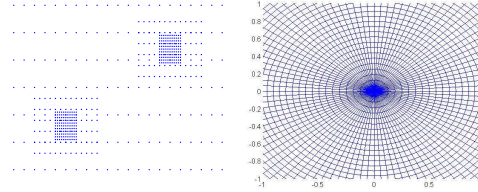
### I-5.3 Preliminaries for Linear Approximations of Mixed Linear/Nonlinear Feasible Domains

The idea is to exploit the existence of linear constraints in (31) and construct exact solutions as long as the unconstrained optimum can be projected on them. In a second stage if the unconstrained optimum is projected on the convex part of the nonlinear constraints, then an approximate solution is obtained by their linearization. Finally if the unconstrained optimum has to be projected on the nonconvex nonlinear constraints then a Voronoi partition is used to construct the explicit solution.

Before detailing the algorithms several useful tools have to be introduced :

**Gridding of the Parameter Space** The parameters (state) space is sampled in order to obtain a representative grid  $\mathcal{G}$ . The way of distributing the points in the state space may follow a uniform distribution, logarithmic or tailored according to the a-priori knowledge of the nonlinearities.

Figure 17 illustrates two common types of gridding, the linear and the spherical one (note that the linear distribution of points can be very conservative for large dimensions spaces).



**Figure 17.** Example of grid of the parameters space

For each point of the grid  $x \in \mathcal{G}$  a set of points on the frontier of the feasible domain  $D(x)$  can be obtained  $\mathcal{V}_x$  by the same kind of parceling. By collecting  $\mathcal{V}_x$  for all  $x \in \mathcal{G}$  a distribution of points  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$  in the extended arguments+parameters space is obtained.

**Convex Hulls** A basic operation is the construction of the convex hull (or a convenient approximation) for the feasible domain in (31). Writing this parameterized feasible domain as :

$$D(x) = \left\{ \mathbf{k}_u \left| \begin{array}{l} h(x, \mathbf{k}_u) \leq 0 \\ A_{in} \mathbf{k}_u \leq b_{in} + B_{in} x \end{array} \right. \right\} \quad (36)$$

and using the distribution of points on the frontier  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$ , one can define in the extended (argument+parameters) space a convex hull  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_{\mathcal{G}}}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_{\mathcal{G}}} = & \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mN_y+n} \mid \exists \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{u_i} \\ x_i \end{bmatrix}, i = 1..mN_y + n + 1, \mathbf{k}_{u_i} \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}, \right. \\ & \left. s.t. \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{mN_y+n+1} \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{u_i} \\ x_i \end{bmatrix}, \sum_{i=1}^{mN_y+n+1} \lambda_i = 1; \lambda_i \geq 0 \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

**Voronoi Partition** The Voronoi partition is the decomposition of a metric space  $\mathbb{R}^n$  in regions associated with a specified discrete set of points.

Let  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_\nu\}$  be a collection of  $\nu$  points in  $\mathbf{R}^n$ . For each point  $s_i$  a set  $V_i$  is associated such that  $\bigcup_i V_i = \mathbf{R}^n$ . The definition of  $V_i$  will be :

$$V_i = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - v_i\|_2 \leq \|x - v_j\|_2, \forall j \neq i\} \quad (38)$$

It can be observed that each frontier of  $V_i$  is part of the bisection hyperplane between  $s_i$  and one of the neighbor points  $s_j$ . As a consequence of this fact, the regions  $V_i$  are polyhedrons. Globally, the Voronoi partition is a decomposition of space  $\mathbf{R}^n$  in  $\nu$  polyhedral regions.

#### I-5.4 Nonparameterized Case

Notation :

$\mathfrak{F}(X)$  The frontier of a compact set  $X$

$\mathfrak{Int}(X)$  The interior of a compact set  $X$

Consider nonparameterized optimization problem with mixed type of constraints :

$$\mathbf{k}_u^* = \arg \min_{\mathbf{k}_u} 0.5 \mathbf{k}_u^T \mathbf{k}_u + c^T \mathbf{k}_u \quad (39)$$

$$\begin{cases} h(\mathbf{k}_u) \leq 0 \\ A_{in} \mathbf{k}_u \leq b_{in} + B_{in} x \end{cases}$$

In relation with the feasible domain  $D$  of this optimization problem one can define :

$\mathfrak{R}_L(D)$  The set of linear constraints in the definition of  $D$

$\mathfrak{R}_{NL}(D)$  The set of nonlinear constraints in the definition of  $D$

$\mathfrak{S}(\mathfrak{R}_*, \mathbf{k}_u)$  The subset of constraints in  $\mathfrak{R}_*$  (either  $\mathfrak{R}_L$  either  $\mathfrak{R}_{NL}$ ) saturated by the vector  $\mathbf{k}_u$

$\mathfrak{B}(\mathfrak{R}_*, \mathbf{k}_u)$  The subset of constraints in  $\mathfrak{R}_*$  violated by the vector  $\mathbf{k}_u$

Algorithm :

A Obtain a set of points ( $\mathcal{V}$ ) on the frontier of the feasible domain  $D$

B Construct the convex hull  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$

C Split the set  $\mathcal{V}$  as  $\tilde{\mathcal{V}} \cup \bar{\mathcal{V}}_L \cup \bar{\mathcal{V}}_{NL} \cup \hat{\mathcal{V}}$



- $\tilde{\mathcal{V}} \in \mathfrak{F}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}})$  and  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}} = \mathcal{C}_{\mathcal{V} \setminus \tilde{\mathcal{V}}}$  (those points in  $\mathcal{V}$  which lie on the frontier of  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$  but are not vertices);
  - $\mathcal{V}_L \in \mathcal{V} \setminus \tilde{\mathcal{V}}$ ,  $\mathcal{V}_L \in \mathfrak{F}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}})$  and  $\mathcal{V}_L$  saturate at least one linear constraint in (39)
  - $\mathcal{V}_{NL} \in \mathcal{V} \setminus \tilde{\mathcal{V}}$ ,  $\mathcal{V}_{NL} \in \mathfrak{F}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}})$  and  $\mathcal{V}_{NL}$  saturate only nonlinear constraints in (39)
  - $\hat{\mathcal{V}} \in \mathfrak{Int}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}})$
- D Construct the dual representation of  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ . This will be represented as an intersection of halfspaces  $\mathcal{H}$ .
- E Split  $\mathcal{H}$  in  $\overline{\mathcal{H}} \cup \hat{\mathcal{H}}$
- $\hat{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$  such that  $\exists x \in \mathcal{C}_{\mathcal{V}}$  with  $\mathfrak{S}(\hat{\mathcal{H}}, x) \neq \emptyset$  and  $\mathfrak{B}(\mathfrak{R}_{NL}, x) \neq \emptyset$
  - $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \setminus \hat{\mathcal{H}}$
- F Project the unconstrained optimum  $\mathbf{k}_u = -c$  on  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$  :

$$\mathbf{k}_u^* \leftarrow Proj_{\mathcal{C}_{\mathcal{V}}} \{-c\}$$

(as it was illustrated in figure 1c)

- G If  $\mathbf{k}_u^*$  saturates a subset of constraints  $\mathcal{K} \subset \hat{\mathcal{H}}$
- (a) Retain the set of points :

$$S = \left\{ v \in \hat{\mathcal{V}} \mid \forall \mathbf{k}_u \in \mathcal{C}_{\mathcal{V}} \text{ s.t. } \mathfrak{Sat}(\hat{\mathcal{H}}, \mathbf{k}_u) = \mathcal{K}; \right. \\ \left. \mathfrak{B}(\mathfrak{R}_{NL}, \mathbf{k}_u) = \mathfrak{Sat}(\mathfrak{R}_{NL}, v) \right\}$$

- (b) Construct the Voronoi partition for the collection of points in  $S$
- (c) Position  $\mathbf{k}_u^*$  w.r.t. this partition and map the suboptimal solution  $\mathbf{k}_u^* \leftarrow v$  where  $v$  is the vertex corresponding to the active region
- H If the quality of the solution is not satisfactory, improve the distribution of the points  $\mathcal{V}$  by augmenting the resolution around  $\mathbf{k}_u^*$  and restart from (2).

### I-5.5 Explicit Solution - Taking into Account the Parametrization

Consider now the multiparametric optimization :

$$\mathbf{k}_u^* = \arg \min_{\mathbf{k}_u} 0.5 \mathbf{k}_u^T H \mathbf{k}_u + \mathbf{k}_u^T F x \quad (40)$$

$$\begin{cases} h(x, \mathbf{k}_u) \leq 0 \\ A_{in} \mathbf{k}_u \leq b_{in} + B_{in} x \end{cases}$$

and the set :

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mN_y + n} \mid \begin{cases} h(x, \mathbf{k}_u) \leq 0 \\ A_{in} \mathbf{k}_u \leq b_{in} + B_{in} x \end{cases} \right\}$$

Algorithm :

- A Grid the parameters space  $\mathbb{R}^n$  and retain the feasible nodes  $\mathcal{G}$
- B Obtain in the extended argument+parameters space a set of points ( $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$ ) lying on the frontier of  $D$
- C Construct the convex hull  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$  for the points in  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$
- D Split the set  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$  as  $\tilde{\mathcal{V}} \cup \bar{\mathcal{V}}_L \cup \bar{\mathcal{V}}_{NL} \cup \hat{\mathcal{V}}$ 
  - $\tilde{\mathcal{V}} \in \mathfrak{F}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}})$  and  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}} = \mathcal{C}_{\mathcal{V} \setminus \tilde{\mathcal{V}}}$  (those points in  $\mathcal{V}$  which lie on the frontier of  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$  but are not vertices);
  - $\mathcal{V}_L \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}} \setminus \tilde{\mathcal{V}}$ ,  $\mathcal{V}_L \in \mathfrak{F}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}})$  and  $\mathcal{V}_L$  saturate at least one linear constraint in (39)
  - $\mathcal{V}_{NL} \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}} \setminus \tilde{\mathcal{V}}$ ,  $\mathcal{V}_{NL} \in \mathfrak{F}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}})$  and  $\mathcal{V}_{NL}$  saturate only nonlinear constraints in (39)
  - $\hat{\mathcal{V}} \in \mathfrak{Int}(\mathcal{C}_{\mathcal{V}})$
- E Construct the dual representation of  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$ . This will be represented as a intersection of halfspaces  $\mathcal{H}$ .
- F Split  $\mathcal{H}$  in  $\bar{\mathcal{H}} \cup \hat{\mathcal{H}}$ 
  - $\hat{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$  such that  $\exists x \in \mathcal{C}_{\mathcal{V}}$  with  $\mathfrak{S}(\hat{\mathcal{H}}, x) \neq \emptyset$  and  $\mathfrak{B}(\mathfrak{R}_{NL}, x) \neq \emptyset$
  - $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \setminus \hat{\mathcal{H}}$
- G Project the set

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{-1}F \\ I \end{bmatrix} x, \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

on  $\mathcal{C}_{\mathcal{V}}$  :

$$U^* \leftarrow Proj_{\mathcal{C}_{\mathcal{V}}} U$$

- H **If**  $\exists x_0$  such that the point :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_u^* \\ x_0 \end{bmatrix} = U^* \cap \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} \middle| x = x_0 \right\}$$

saturates a subset of constraints

$$\mathcal{K}(x_0) = \mathfrak{S} \left( \mathcal{H}, \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x_0 \end{bmatrix} \right) \subset \hat{\mathcal{H}}$$

**then** :

- (a) Construct

$$U_{NL}(x_0) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} \in U \middle| \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u^* \\ x \end{bmatrix} \in U^* \right.$$

$$\left. t.q. \quad \mathfrak{S} \left( \mathcal{H}, \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x_0 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{K}(x_0) \right\}$$

- (b) Perform :

$$U^* = U^* \setminus \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} \middle| \mathfrak{S} \left( \mathcal{H}, \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x_0 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{K}(x_0) \right\}$$

(c) Retain the set of points :

$$S = \left\{ v \in \hat{\mathcal{V}} \mid \forall \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_{\mathcal{V}} \quad \text{with} \right. \\ \left. \begin{aligned} \mathfrak{S}(\hat{\mathcal{H}}, \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix}) &= \mathcal{K}(x_0) \Rightarrow \\ \mathfrak{B}(\mathfrak{R}_{NL}, x) &= \mathfrak{S}(\mathfrak{R}_{NL}, v) \end{aligned} \right\}$$

(d) Construct the Voronoi partition for the collection of points in  $S$

(e) Position  $U_{NL}(x_0)$  w.r.t. this partition and map the suboptimal solution  $U_{NL}^*(x_0) \leftarrow U_{NL}(x_0)$  by using the vertex  $v$  for each active region.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_u^* \\ x \end{bmatrix} = v \leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{k}_u \\ x \end{bmatrix}$$

**else** : jump to (10)

I Return to point (8)

J If the quality of the solution is not satisfactory, improve the distribution of the points  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$  and restart from (2).

## I-6 Numerical Example

### I-6.1 Simple Convex Multiparametric Nonlinear Program

Consider the discrete-time linear system :

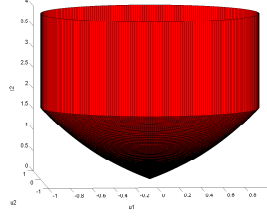
$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 0.9 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u_t \quad (41)$$

and a predictive control law with a prediction horizon of three sampling times and a control horizon of two steps. A nonlinear set of constraints will be also considered :

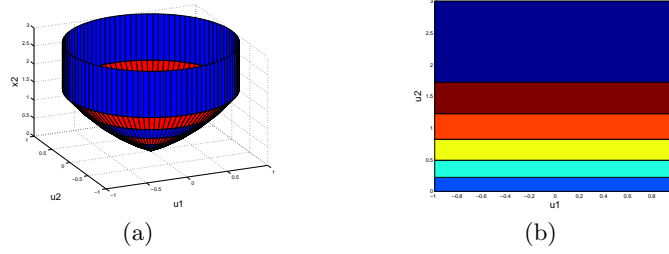
$$\begin{cases} \sum_{k=0}^2 u_{t+k}^2 \leq 1 \\ \sum_{k=0}^2 u_{t+k}^2 \leq \ln([0 \ 1] x_t + 1) \\ [0 \ 1] x_{t+k} \geq 0; k = 0, 1, 2 \end{cases} \quad (42)$$

It is obvious that the topology of the feasible domain is changing with the system dynamics, which means that the state vector represents in fact a parameter. More precisely, in our case only the second component of the state,  $x_t$  is influencing the shape of the feasible domain and thus one can draw this dependence on the parameter as in figure 18. Further this parameterized convex shape can be approximated with a set of parameterized linear inequalities and obtain a double description of a parameterized polyhedron as in figure 19(a). A pre-cutting in zones with regular shape (figure 19(b)) can help in the development of explicit solution due to the important degree of redundancy.

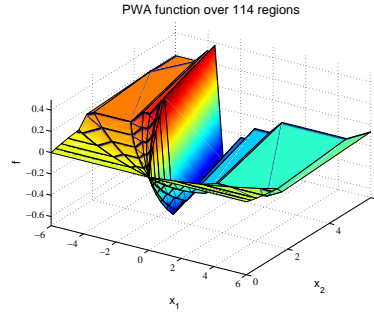
Finally the nonlinear MPC law for the system (41) and the constraints (42) can be approximated by the explicit solution found in terms of a piecewise linear control law as in figure 20.



**Figure 18.** The nonlinear dependence of the feasible domain on the parameters



**Figure 19.** (a) The approximation by a parameterized polyhedron ; (b) Regions in the parameters' space corresponding to redundancy-free constraints sets.



**Figure 20.** Explicit solution as a piecewise linear function.

### I-6.2 Example of Non-Convex Problem

Consider the MPC problem implemented using the first control action of the optimal sequence :

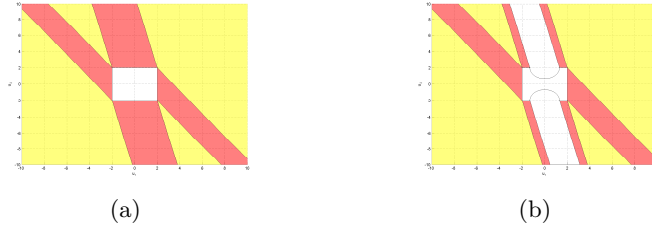
$$k_u^* = \arg \min_{k_u} \sum_{i=0}^{N_y-1} x_{t+k|t}^T Q x_{t+k|t} + u_{t+k|t}^T R u_{t+k|t} + x_{t+N_y|t}^T P x_{t+N_y|t} \quad (43)$$

with

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 13.73 & 2.46 \\ 2.46 & 2.99 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{t+k+1|t} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^A x_{t+k|t} + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}^B u_{t+k|t} \quad k \geq 0 \\ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \leq u_{t+k|t} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad 0 \leq k \leq N_y - 1 \\ (u_{t+k|t}^1)^2 + (u_{t+k|t}^2 - 2)^2 \geq \sqrt{3} \quad 0 \leq k \leq N_y - 1 \\ (u_{t+k|t}^1)^2 + (u_{t+k|t}^2 + 2)^2 \geq \sqrt{3} \quad 0 \leq k \leq N_y - 1 \\ u_{t+k|t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.59 & 0.76 \\ -0.42 & -0.16 \end{bmatrix}}_{K_{LQR}} x_{t+k|t} \quad N_u \leq k \leq N_y - 1 \end{array} \right.$$

One can observe the presence of both linear and nonlinear constraints. By following the previous algorithm, in the first stage, the partition of the state space is performed by considering only the linear constraints (figure 21(a)).



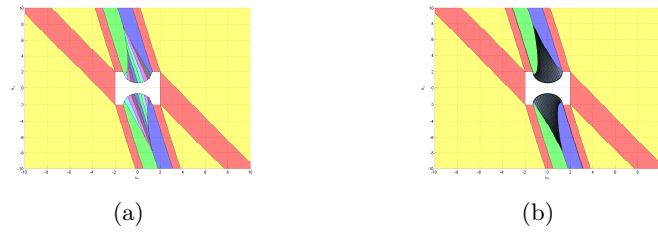
**Figure 21.** a) Partition of the arguments space (linear constraints only). b) Retention of the regions with feasible linear projections.

Each such region correspond with a specific projection law. By simply verifying the regions where this projection law obey the nonlinear constraints, the exact part of the explicit solution is obtained (figure 21(b)).

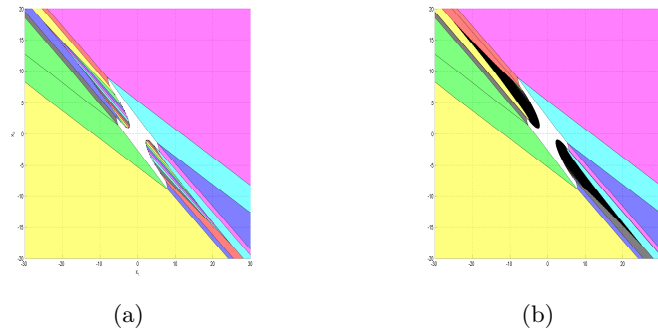
Further, a distribution of points on the nonlinear frontier of the feasible domain has to be obtained and the associated Voronoi partition obtained. By superposing it to the regions non covered at the previous step one obtain a complete covering of the arguments space. Figure 22(a) depicts such a complete partition for distribution of 10 points for each nonlinear constraint. Figure 22(b) augments the density to 100 points.

By correspondence, the figures 23(a) and 23(b) describe the partition of the state space for the explicit solution.

Finally the complete explicit solution for the two cases are described in figures 24(a) and 24(b). The discontinuities are observable as well as the increase in resolution over the nonlinearity with the augmentation of the number of points in the Voronoi partition.

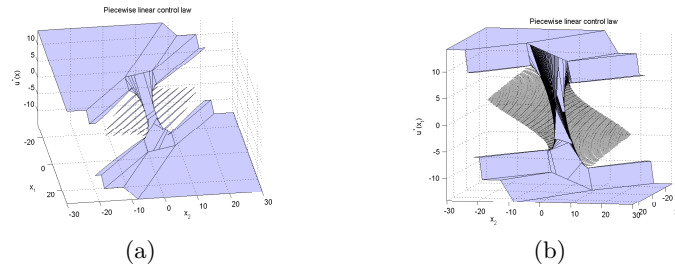


**Figure 22.** a) Partition of the arguments space (nonlinear case) - 10 points per nonlinear constraint. b) Partition of the arguments space (nonlinear case) - 100 points per nonlinear constraint.



**Figure 23.** a) Partition of the state space - 10 points per nonlinear constraint. b) Partition of the state space - 100 points per nonlinear constraint.

In order to give a give an image of the complexity it must be said that the explicit solutions have 31 and 211 regions respectively and the computational effort was less than  $2s$  in the first case and  $80s$  in the second case, mainly spent in the construction of supplementary regions in the Voronoi partition.



**Figure 24.** a) Explicit control law - 10 points per nonlinear constraint. b) Explicit control law - 100 points per nonlinear constraint.

## ***Partie II : Commande prédictive des systèmes hybrides. De l'optimisation multiparamétrique des problèmes d'optimisation mixtes aux implémentations basées sur les algorithmes génétiques.***

### **Resumé :**

Ce chapitre est dédié aux lois de commande prédictive pour les systèmes hybrides. Le formalisme de modélisation choisi, MLD (Mixed Logical Dynamical), offre l'avantage d'une expression compacte de la dynamique sous la forme d'un système d'égalités et d'inégalités linéaires impliquant les états et les entrées de nature discrète ou continue. En termes de performance de la commande prédictive, le temps d'obtention de solutions aux problèmes d'optimisation associés détermine l'efficacité de la mise en oeuvre pour les applications temps-réel.

Les études théoriques sur la commande prédictive ont analysé les implications structurelles de choix de l'horizon de prédiction et des contraintes terminales. Dernièrement, une attention particulière a été accordée aux opérations de calcul polyédral qui peuvent être effectuées hors ligne pour construire des solutions optimales explicites réduisant l'effort de la mise en oeuvre à l'évaluation en ligne des fonctions analytiques.

Par rapport au chapitre précédent qui a traité les problèmes d'optimisation avec argument réel, ici seront examinés les techniques d'optimisation mixte (comportant les variables réelles et entières) utilisées dans la commande prédictive. En outre, les solutions explicites sont traitées en utilisant une approche basée sur le concept de *polyèdres paramétrés*.

Étant donné que les expressions analytiques ne peuvent pas être une solution pour les systèmes complexes, dans la deuxième partie nous nous concentrerons sur les lois prédictives basées sur l'optimisation en temps réel afin de proposer une alternative qui utilise les algorithmes génétiques pour remplacer les routines d'optimisation qui explorent de façon exhaustive l'espace faisable (voir les techniques de type Branch and Bound). Compte tenu de cet objectif, une adaptation du modèle MLD peut être envisagée, de sorte que les algorithmes génétiques soient applicables à des problèmes d'optimisation quadratiques sur les variables binaires.

La transformation des variables continues est basée sur des techniques de type "ensembles flous" qui permettent une adaptation de la commande pour maintenir les performances du processus de régulation. Enfin, l'approche prouve que le temps de calcul est considérablement réduit lors de la mise en oeuvre qui devient possible pour les systèmes temps réel. Un processus de régulation du niveau de liquide dans trois bassins interconnectés est présenté comme exemple d'application.



Les résultats présentés dans ce chapitre se trouvent partiellement dans les publications suivantes :

S. OLARU, I. DUMITRACHE, D. DUMUR, "Modified MLD form for discrete optimization of hybrid systems", IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems, Saint Malo, France, 2003.

S. OLARU, JEAN THOMAS, DIDIER DUMUR AND JEAN BUISSON "Genetic algorithm based model predictive control for hybrid systems under a modified MLD form" International Journal of Hybrid Systems, Vol. 4, No1-2, 2004, pp. 113-133, 2004.

S. OLARU, D. DUMUR, J. THOMAS, M. ZAINEA, "Predictive control for hybrid systems. Implications of polyhedral pre-computations", Nonlinear Analysis : Hybrid Systems and Applications, Elsevier, vol. 2, no2, pp. 510-531, 2008.

S. OLARU, JEAN THOMAS, JEAN BUISSON, DIDIER DUMUR - "Evolution du formalisme MLD en vue d'une optimisation discrète des systèmes hybrides" JDA-JNA Valenciennes Juin 2003.

S. OLARU, (Invited Lecture) International Conference of Hybrid Systems and Applications - "Predictive control for hybrid systems. How far the polyhedral pre-computations might go?" - The University of Louisiana, Lafayette, USA, 22-26 May 2006.

# Predictive control for hybrid systems.

**Résumé** The present paper deals with the predictive control laws for hybrid systems. The modelling formalism used will be the Mixed Logical Dynamical (MLD) which offers the advantage of a compact expression of the dynamics in terms of linear equalities and inequalities on the logical and continuous-time states and inputs. Being an optimisation-based control technique, the predictive control needs an efficient implementation scheme in order to be effective in real-time.

Several studies assess the importance of the prediction horizon and the terminal constraints due to their implications in the structure of the associated optimal control problem. Lately it was shown that as long as the constraints remain linear, the polyhedral computations can serve as tools for the migration of the on-line computational effort to off-line explicit constructions in terms of explicit solutions which can avoid a costly on-line optimum seeking and thus pushing the application of predictive laws to even higher sampling rates.

This part of the thesis reviews the on-line optimisation techniques proposed for the predictive control of hybrid systems based on mixed integer optimization problems. Further, the explicit solutions are analyzed using a parameterized polyhedra approach.

Taking into account the fact that analytic solutions can be constructed efficiently principally for reduced order models in the second part we direct our attention to the on-line optimisation schemes by proposing an alternative optimization technique based on genetic algorithms. The genetic algorithms provide suboptimal solutions in reasonable time even with a long prediction horizon. For this purpose, a modified MLD form with only discrete control actions is derived that results in a structure adequate for quadratic (0,1)-problems formalism.

The transformation of continuous inputs is based on fuzzy intelligent techniques including an adaptation of the variables sets for a better precision. This approach considerably reduces the computation time, thus enabling real time implementation even with small sampling time. This strategy is applied in simulation to the control of a three tanks benchmark.

## II-1 Introduction

Being an attractive field for engineers in the last decade, the control of hybrid systems necessitates pertinent answers to several challenging problems, like the switching between different operating regimes, the interaction of continuous-time and discrete event subsystems and the overall satisfaction of operational constraints involving combinations of states and inputs [178]. Despite the important theoretical studies on hybrid systems presented lately in the literature, like

the multiple Lyapunov functions, Krasovskii-LaSalle invariance principle, classical dissipative theory, the set-valued maps, etc. (see for example [177], [162], [230], [202] and references therein) which can be casted for the hybrid systems case, their use in engineering applications are rather limited.

Given these reticences, an inherent question is whether the mature linear continuous-time automatic control methods can be adapted in a systematic manner to the design of control laws for hybrid systems. It turns out that the answer is generally negative (due to the structural disparity which makes the classical frequency analysis inappropriate for example). There is however a notable exception, that of predictive control law ([203], [179], [182], [232], [190]). Indeed this technique, which is based on successive finite time optimal control problems over a receding horizon, has the important advantage of being a time-domain design procedure and thus being effective in the hybrid systems framework, too. However, the experience of predictive laws for hybrid systems as it is presented in the literature and reported by applications can be classified mostly as recent history due to a "missing link", an adapted prediction model. The available models (based on automata, bond graphs, Petri nets, linear complementary (LC) problems, etc. [178]) were not appropriate for building predictions which can be further integrated in classical optimization problems (LPs, QPs). The beginning of the 2000 saw the emergence of a modelling approach known as "mixed logical dynamical" (MLD) [165], which delivers a compact linear dynamical system involving a vector of continuous and logical inputs and states. This allows the description of a large class of hybrid systems, like the piecewise linear systems or systems with mixed continuous/discrete inputs and states.

From the structural point of view, a MLD model describes the dynamical evolution exclusively through linear equalities and inequalities and this represents an undeniable advantage, as long as the optimization problem based on the predictions over a finite horizon will have to deal only with a linear set of constraints.

The optimization problems which now lie in the class of mixed integer quadratic/linear programs (MIQP/MILP) are computationally involving (NP-complete problems) due to the presence of logical optimisation arguments. The solvers present a worst case combinatorial complexity as it is the case for example with the classical branch and bound routines, even if they are tailored to the problem specificity [192]. The real-time implementation constraints (high sampling rates, fast dynamics) might force the optimization routines to act on a short time interval and to offer at least a feasible suboptimal solution. This can be obtained in a slightly different manner by renouncing to the exhaustive search and the use of evolutionary methods like the genetic algorithms. These can be applied either for the original problem either by using an adaptation mechanisms [247] to improve the degree of precision for the continuous decision variables implied in the optimisation.

In the present chapter the MIQP/MILP and their associated optimisation routines are classified with respect to the predictive control laws which employ them. The structural properties will be analyzed using a geometrical approach

and the polyhedral computations will be used to detail the evolution of the feasible domain. When these polyhedral operations are performed before the effective implementation with the goal of constructing explicit solution, one can talk about polyhedral pre-computations [248]. However due to the fact that the set of constraints might be very large, these constructions have to be used with care, especially if a dual description of polyhedral sets is involved.

Taking into account the fact that analytic solutions can be constructed efficiently principally for reduced order models in the second part we direct our attention to the on-line optimisation schemes by proposing an alternative optimization technique based on genetic algorithms. The genetic algorithms provide suboptimal solutions in reasonable time even with a long prediction horizon. For this purpose, a modified MLD form with only discrete control actions is derived that results in a structure adequate for quadratic (0,1)-problems formalism.

The transformation of continuous inputs is based on fuzzy intelligent techniques including an adaptation of the variables sets for a better precision. This approach considerably reduces the computation time, thus enabling real time implementation even with small sampling time. This strategy is applied in simulation to the control of a three tanks benchmark.

## II-2 Predictive control of hybrid systems

### II-2.1 The prediction model

The predictive control laws imply the resolution at each sampling time of a finite time optimal control problem constructed using the known model of the system as it can be seen from (5). In the case of a hybrid system, such a model has to be elaborated, taking into account the interconnection between the discrete event and the continuous dynamics.

The MLD model describes the systems by linear dynamic equations subject to linear inequalities involving both real and integer variables, under the following form (see [165], for more details) :

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \mathbf{A}x_t + \mathbf{B}_1u_t + \mathbf{B}_2\delta_t + \mathbf{B}_3z_t \\ y_t &= \mathbf{C}x_t + \mathbf{D}_1u_t + \mathbf{D}_2\delta_t + \mathbf{D}_3z_t \\ \mathbf{E}_2\delta_t + \mathbf{E}_3z_t &\leq \mathbf{E}_1u_t + \mathbf{E}_4x_t + \mathbf{E}_5 \end{aligned} \quad (44)$$

where :

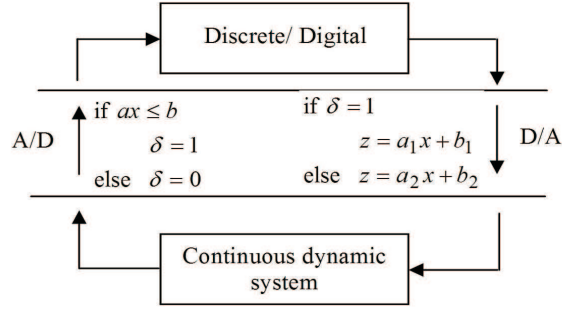
$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_c \\ x_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_c} \times \{0, 1\}^{n_l} ; u = \begin{pmatrix} u_c \\ u_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_c} \times \{0, 1\}^{m_l} \\ y &= \begin{pmatrix} y_c \\ y_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p_c} \times \{0, 1\}^{p_l} ; \delta \in \{0, 1\}^{r_l} ; z \in \mathbb{R}^{r_c} \end{aligned}$$

are respectively the vectors of continuous and logical ( $\{0, 1\}$ ) states of the system, continuous and logical control inputs (on/off type of decisions, coded as well in

the set  $\{0, 1\}$ ), continuous and logical output signals, auxiliary logical and continuous variables  $(\delta; z)$ . The auxiliary variables are introduced when translating propositional logic into linear inequalities following the scheme in Figure 25. A MLD model equation (44) thus represents logical relations and interaction between continuous and logical variables by mixed integer linear inequalities [207].

It is interesting to observe the similarity between the model (44) and the classical linear time-invariant state space models. The changes or switches which may appear over such dynamics are modelled here using the auxiliary variables which do take into account the interconnections. The structural advantage is that these interconnections take the form of linear inequalities for which effective algorithms exist.

The  $\mathbf{A}$ ,  $\{\mathbf{B}_j\}_{j=1\dots 3}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\{\mathbf{D}_j\}_{j=1\dots 3}$ ,  $\{\mathbf{E}_j\}_{j=1\dots 5}$  matrices in equation (44) can be obtained through automatic treatment of models described in a specification language HYSDEL (Hybrid System Description Language) as explained in [168].



**Figure 25.** MLD model structure.

Given the current state  $x_t$  and the input  $u_t$  for a MLD system, the auxiliary variables  $\delta_t$  and  $z_t$  can be defined from the inequalities equation of (44). An important aspect is the "well-posed assumption" meaning that there is a unique solution of  $\delta$  and  $z$  for a given pair  $(x, u)$ . In other words, once known the state and the inputs, the pair of auxiliary variables can be uniquely defined.

The Mixed Logical Dynamical (MLD) model allows describing various classes of hybrid systems, like linear hybrid systems, constrained linear systems, sequential logical systems (finite state machines, automata), some classes of discrete event systems, and non-linear dynamic systems, where nonlinearities can be expressed through logical combination [165].

## II-2.2 The problem description

Using an MLD model for the prediction, a classical model predictive control problem can be stated. Let  $t$  be the current time,  $x_t$  the current state and  $t + N$  the end of the prediction window. It is supposed that it exists a routine able to

provide the optimal control sequence  $\mathbf{k}_u^*$  which drives the state from  $x_t$  to the equilibrium state  $x_e$  by minimizing the cost function :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{k}_u} J(\mathbf{k}_u, x_t) = & \|x_{t+N/t} - x_e\|_{\mathbf{P}}^2 + \sum_{j=0}^{N-1} \|u_{t+j} - u_e\|_{\mathbf{Q}_1}^2 + \|\delta_{t+j/t} - \delta_e\|_{\mathbf{Q}_2}^2 + \\ & + \|z_{t+j/t} - z_e\|_{\mathbf{Q}_3}^2 + \|x_{t+j/t} - x_e\|_{\mathbf{Q}_4}^2 + \|y_{t+j/t} - y_e\|_{\mathbf{Q}_5}^2 \\ & \begin{cases} x_{t+j+1/t} = \mathbf{A}x_{t+j/t} + \mathbf{B}_1u_{t+j/t} + \mathbf{B}_2\delta_{t+j/t} + \mathbf{B}_3z_{t+j/t} \\ y_{t+j/t} = \mathbf{C}x_{t+j/t} + \mathbf{D}_1u_{t+j/t} + \mathbf{D}_2\delta_{t+j/t} + \mathbf{D}_3z_{t+j/t} \\ \mathbf{E}_2\delta_{t+j/t} + \mathbf{E}_3z_{t+j/t} \leq \mathbf{E}_1u_{t+j/t} + \mathbf{E}_4x_{t+j/t} + \mathbf{E}_5 \\ x_{t+N/t} \in X_f \end{cases} \end{aligned} \quad (45)$$

where the predictions are noted  $x_{t+j/t}$  and  $x_{t/t} = x_t$  and the weighting is given by the matrices  $\mathbf{P} > 0$ ,  $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^T > 0$ , for  $i = 1, 4$ , and  $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^T \geq 0$ ,  $i = 2, 3, 5$ .  $X_f$  represents the polytopic terminal set described by a set of linear constraints.

The vectors  $u_e$  and  $x_e$  are identifying the equilibrium point where the system has to be driven (it is supposed that this point is attainable in a time interval equal with the chosen prediction window). The vectors  $\delta_e$ ,  $z_e$  are the auxiliary variables corresponding to this equilibrium point and can be calculated as the solution of the system of inequalities in (44) for  $u = u_e$  and  $x = x_e$ . Practically this can be done by solving an optimisation problem having these inequalities as constraints (the well-posed assumption assures that the feasible domain contains a unique candidate solution).

The predictive control laws can use a control horizon  $N_u$  shorter than the prediction horizon  $N_u < N$  in order to decrease the number of optimization variables. Due to the fact that a control action is needed for the construction of the predictions it is considered then  $u_j$  constant for  $j \geq N_u$ .

Only the first value of this optimal sequence  $\mathbf{k}_u$  is effectively applied to the plant, the whole procedure being restarted at the next sampling period by 'receding' the prediction horizon :

$$u_t = [1 \underbrace{0 \dots 0}_{N-1}] \mathbf{k}_u^*(x_t) \quad (46)$$

The terminal constraint in (45) is a useful ingredient in the construction of necessary conditions for stability of the closed-loop systems. Indeed if the set  $X_f$  is positive invariant [171] with respect to the model (44) and the control law (46) the stability is assured [232]. However the construction of  $X_f$  is a difficult problem on its own, and it is supposed in the following that it has a polyhedral structure such that the constraints for (45) remain linear.

As it can be observed for (45), beside the actual arguments  $\mathbf{k}_u$ , the optimization routine has to consider a complete set of implicit arguments,  $x, \delta, z, y$ . The equality constraints related to the dynamics of the MLD form 44 can be used to reduce the problem (by replacing the predicted states and outputs,  $x, y$  in the optimization). Simple manipulations leads to the resolution, at each sampling

time, of a mixed integer quadratic problem (MIQP) :

$$\begin{aligned} \min_{\chi} \quad & \frac{1}{2} \chi^T H \chi + f^T \chi \\ \text{subject to} \quad & A_{in} \chi \prec b_{in} \end{aligned} \quad (47)$$

where the optimization vector is :

$$\chi = [u_t^T, \dots, u_{t+N-1}^T, \delta_t^T, \dots, \delta_{t+N-1}^T, z_t^T, \dots, z_{t+N-1}^T]^T \quad (48)$$

containing both logical and real components.

## II-3 Optimization

The first remark related to the optimization (79) is this presence of logical variables which number is in fact

$$L = N_u m_l + N r_l \quad (49)$$

The worst case resolution time for such a problem is thus increasing exponentially with the length of the prediction and control horizon respectively.

### II-3.1 General considerations

As long as the optimization problems do not have to handle integer (logical) variables, several classical solvers can be used, all of them imperatively constructing a series of trial solutions, until the optimality conditions are achieved or a relative error bound is attained :

- active set methods [199] ;
- the resolution of an equivalent complementary linear problem which represents in fact an extension of the classical Simplex methods, introduced by Dantzig [186] about 50 years ago which visits candidate basis until the optimal one is reached ;
- interior point methods (also called barrier methods due to the introduction of artificial barrier constraints in order to avoid the constraints activation). These techniques are inherited from nonlinear programming, but their application to linear programming dates back only to Karmarkar's innovative analysis in 1984 [214]. In the predictive control area their usage was investigated in studies of Wright which pointed out that the structural properties of the brute form (45) can be used during optimum searching [283].

In the case when the integer type of optimization variables are to be taken into account (MIQP problems), the convexity attributes of the classical QP framework are lost. More than that, due to the fact that some variables take values in a finite alphabet, the optimization (79) identifies itself as a particular member of the class of combinatorial problems. Determining whether a MIQP has an objective value less than a given target leads to a "NP-complete" problem

which proves to be an "inquiry" problem in view of a resolution at each sampling time in the predictive control framework.

The convexity can be regained by fixing the values of integer variables and thus obtaining particular solutions by means of classical QP solvers. Constructing series of such particular solutions can refine the global solution. If all the integer combinations are covered, then the global optimum is guaranteed. Indeed, a particular candidate may be an optimal solution. But in contrast to methods for ordinary QP (based on sufficient optimality conditions, or relative error bounds), the MIQP procedures may not be able to prove a solution to be optimal until long after they have found it.

Due to the fact that predictive control laws need a solution in a strict time interval, the goal of a provable optimum may be abandoned and a sub-optimal feasible solution obtained by terminating a MIQP code prematurely admitted.

### II-3.2 Branch and bound solvers

Fortunately, generally there is no need to use brute-force to explore all possible combinations of integer variables in order to find the optimal solution. Almost all the MIQP codes used as solvers for on-line predictive laws are based on "branch-and-bound" procedure to search for an optimal integer solution (several authors agree on the fact that these methods are the most successful for constructing optimal solutions for MIQP [192]). The idea is to solve a sequence of related QP "relaxations" (the former logical variables are allowed to span over the continuous interval  $[0,1]$  and not on the discrete set  $\{0,1\}$ ). Then the integer variables are fixed, leading to branches (this is the reason why the B&B methods have associated a "search tree"). In this way the original problem is divided into smaller subproblems (branches) that are solved recursively. The "bound" comes from the fact that some branches can be fathomed if the relaxed optimum is superior to an upper bound found on another branch. A branch can be cut also if a relaxed subproblem is infeasible as all the sub-problems behind this node will have to act on a set of constraints even more restrictive and thus the feasibility can not be recovered.

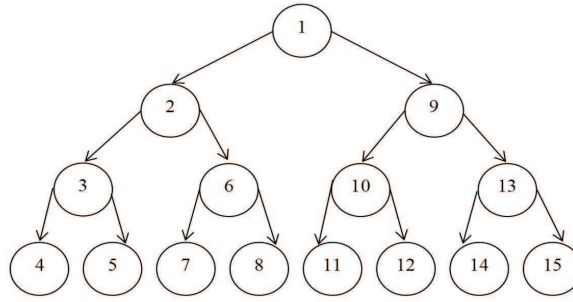
The branch and bound MIQP solvers distinguish themselves primarily by the number of relaxed QPs solved for reaching the optimum, and secondarily by the method employed for solving each individual QP (the similarities between successive QPs in the "search tree").

The number of relaxed QPs is related to the strategy for exploring the B&B tree :

- depth first search (the problems are solved according to last-in first-out rule, figure 2 for an example with 3 logical variables) ;
- breadth first search (problems at level  $K$  are solved only after solving the problems at level  $K - 1$ ) ;
- outside first search (the problems to be solved start from outside towards inside) ;



- the choice of branching variable is made upon the user supplied priorities in the branching variable (important weighting in the MPC cost function for example);
- the branching can be done also according to the result obtained for the relaxed problem (if the solution is close to satisfy the integer constraints, it will be preferred).



**Figure 26.** B&B tree with three binary variables, according to depth first strategy.

Regarding the bounding procedure, the B&B methods may use :

- hot starts for the QP subproblems (a feasible initial solution has to be constructed and this is done generally in a first stage by means of a LP). In the case of predictive control originated problems, the tail of the solution at the previous sampling time can provide useful information in order to get a feasible starting point.
- Interior-point methods have entirely different requirements for a good starting point. Any reasonable interior-point-based code has its own routines for picking a starting point that is centered away from the constraints.
- SDP procedures in conjunction with cutting planes methods [208].

Nevertheless, the use of B&B for predictive control proves its limitations for small sampling times and important number of logical variables. In these cases, the search tree can not be entirely explored and the routine is stopped after a limited number of operations. The solver then returns an infeasibility message (the undesirable case due to the real-time control requirements) or a suboptimal solution (with a measure of the sub-optimality given by the upper and lower bounds obtained on the subgraph explored).

In order to avoid at least the danger of an infeasibility message, one can accept that large MIQP are not typically solved to a proved optimal solution, that opens up a broad area of approximate methods, probabilistic methods and heuristics, as well as their mixture with B&B for smaller subproblems. The next subsection sketches a possible classification of such approaches in a MPC framework.

### II-3.3 Classification

Before any other consideration it must be said that the way formulating the MIQP can be as important as the actual choice of solver. Thus the first difference has to be made between the predictive laws synthesized according to general rules inherited from the linear MPC case and those which based on attainability studies exploit a minimal-horizon type of receding prediction. This means that terminal, or "tube", constraints are added in order to reduce the prediction horizon which is equivalent with a less complicate MIQP at each sampling period.

Figure 3 presents these two alternatives for the MPC implementation and underlines the fact that in both cases the structure of the optimization problem remains in the class of MIQP, even if the scale is improved.

The same figure presents a demarcation between the implementations based on on-line optimisation and those where an explicit analytical dependence of the optimum on the current state exists. In the second case, there is no need for on-line optimisation, the computational load being reduced to the evaluation of the analytical function. Details on such approach are discussed in the next sections.

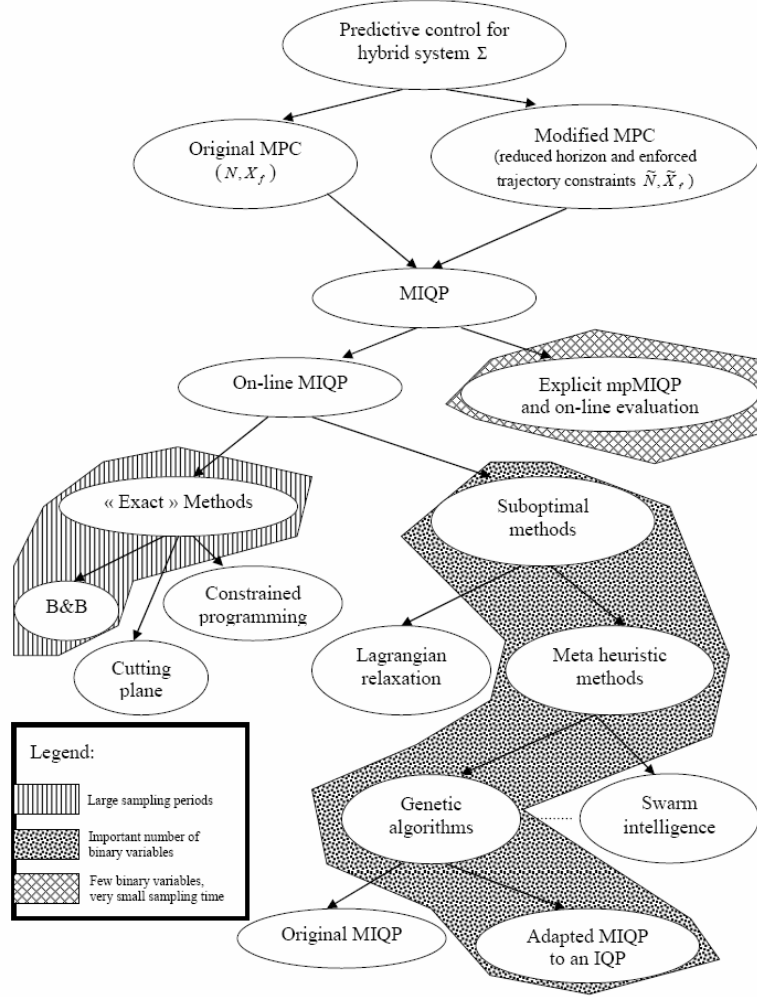
Returning to the classification, one can notice within the on-line implementation part a separation between the exact methods and the routines which allow from the design stage a certain degree of suboptimality as it is the case for example with the Lagrangian relaxation where the quality of the solution is improved, but it can not go beyond the duality gap.

In the class of exact methods, the B&B is a popular choice due to the plethora of software packages available but also due to the fact that it allows tailoring the solver to the specific application.

In the class of suboptimal methods, the use of genetic algorithms proves to be a versatile choice. However, as these techniques find the origin in the combinatorial optimization, it may necessitate an adaptation of the continuous variables to a finite alphabet [247]. If this is done judicious, the quality of the control law is improved comparing with a blind discretization of a continuous interval. More than that, at high sampling rates the solvers can provide a feasible input for the system, even if the control action is only suboptimal with respect to the original problem.

From the standpoint of computational complexity, finding out if an MIQP model has a feasible solution is essentially as hard as actually finding the optimum. Branch and Bound procedures have to explore the entire search tree to prove this. There are no shortcuts in general and thus the infeasibility has to be analyzed off-line in order to assure that during the control process, no self driven infeasibility can occur.

As a rule of thumb, the B&B fits the applications with large sampling times, where the computational resources are large enough to allow worse cases when the exploration of the entire search tree is needed. The heuristical methods (like genetic algorithms) can be successfully applied for large scale systems with relatively small sampling times due to the fact that they offer feasible solutions



**Figure 27.** A classification of predictive control possible implementations.

after a reasonable number of iterations. They are not exploiting the structure of the problem and thus they are less sensitive to pathological situations.

## II-4 Geometrical aspects and explicit solutions

Approaches related to explicit optimal solutions for (45) found a place in the previous classification relatively late. Their best results may be found for relatively reduced state space and high sampling rates, where the on-line evaluation effort is small.

But what is the exact meaning of an explicit solution for (45)? It represents in fact an analytical expression of the optimum as a function :

$$\chi = \chi(x_t, x_e, u_e, \delta_e, z_e) \quad (50)$$

over all the feasible combinations of these context parameters. Supposing that the equilibrium points do not vary with time, then the explicit solution can be written as  $\chi = \chi(x_t)$  for  $x_t \in X \subset \mathbf{R}^{n_c} \times \{0, 1\}^{n_l}$ , where  $X$  is the set of feasible states for the control problem (45).

By rewriting (45) as in (79) by stressing the dependence of the optimization problem in the vector of parameters  $x_t$  one can obtain :

$$\begin{aligned} \chi(x_t) = \arg \min_{\chi} \quad & \frac{1}{2} \chi^T H \chi + x_t^T F \chi + f^T \chi \\ \text{subject to} \quad & A_{in} \chi \prec B_{in} x_t + b_{in} \end{aligned} \quad (51)$$

which is in fact a multiparametric - mixed integer quadratic problem (mp-MIQP).

The interest for these types of optimisation problems which depend on the parameters variation has been treated in the so-called post-optimal analysis of a standard LP/QP framework [198]. Also known as "Sensitivity Analysis", it offers information about how the coefficients in the problem could affect the optimal solution. The sensitivity analysis in the presence of integer variables is not relevant as long as a limited amount of information can be obtained by fixing the integer optimisation variables and doing post-optimal analysis on the remaining continuous variables.

When constructing explicit solution for (51), one deals with multiparametric programming due to the fact that a characterization of the solution is needed for the full range of parameters values. The parametric programming offer a cartography of the parameters space, with the associated optimizer (and optimal cost). Due to the fact that (51) has a quadratic cost function and linear constraints, the optimum is piecewise affine function of parameters over polyhedral partitions. These are also called critical region and correspond to a specific set of active constraints and optimality conditions.

If in the case of multi-parametric linear programs and multi-parametric quadratic programs the explicit solution can be expressed as a continuous function of parameters (the continuity being related to the convexity of the problem and the way the active constraints evolves as a function of parameters). When the integer type of variables have to be considered, the convexity of the feasible domain is lost and subsequently the continuity. Nevertheless, the linear dependence of the parameters vector is preserved as well as the polyhedral description of the critical regions and thus, the on-line evaluation procedure do not suffer in the mpMPQP case.

One can use the relationship between the unconstrained optimum (uniquely defined in the case of QP) and the topology of the feasible domain in order to describe the critical regions and the linear function of parameters. In the following section, the explicit solutions for multiparametric quadratic programs

obtained using the concept of parameterized polyhedra will be generalized to the mpMIQP case by employing the Voronoi diagrams associated with the finite set of combinations of logical variables.

In order to position these approach with respect to the classification in Figure 3, it must be said that the laborious construction mechanism minimises the application area to small scale problems, at least for the moment. In the present section we discuss the details of this geometric approach while in section II-5 we will return to the MPC schemes based on on-line optimisation, thus addressing the case of large scale systems.

#### II-4.1 Explicit solution for a mpIQP

**Unconstrained case** The unconstrained multiparametric integer quadratic program (mpIQP) :

$$\begin{aligned} \chi(x_t) = \arg \min_{\chi} \quad & \frac{1}{2} \chi^T H \chi + x_t^T F \chi + f^T \chi \\ \text{with} \quad & \chi \in \{0, 1\}^p \end{aligned} \quad (52)$$

was discussed in [256] in the framework of multiparametric optimization on a finite alphabet. Indeed, if one considers all the possible realizations for the vector  $\chi$ , a finite alphabet is obtained  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^p$ .

By defining the mapping  $q_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{B}$  as a function which assigns to each vector  $\chi$  the nearest neighbor in  $\mathcal{B}$  in the sens of Euclidean norm :

$$q_{\mathcal{B}}(\chi) = b_i \quad \text{for} \quad \{\chi \in \mathbb{R}^p : (\chi - b_i)^T (\chi - b_i) \leq (\chi - b_j)^T (\chi - b_j), \forall b_j \neq b_i, b_j \in \mathcal{B}\} \quad (53)$$

one construct the so-called Voronoi partition (see an illustration in figure 28) of  $\mathbb{R}^p$  which can be used in relation to the unconstrained optimum and the structure of the cost function in order to obtain the explicit solution for (52). By using again the direct and inverse ellipsoidal-to-sphere transformations this explicit optimum is written :

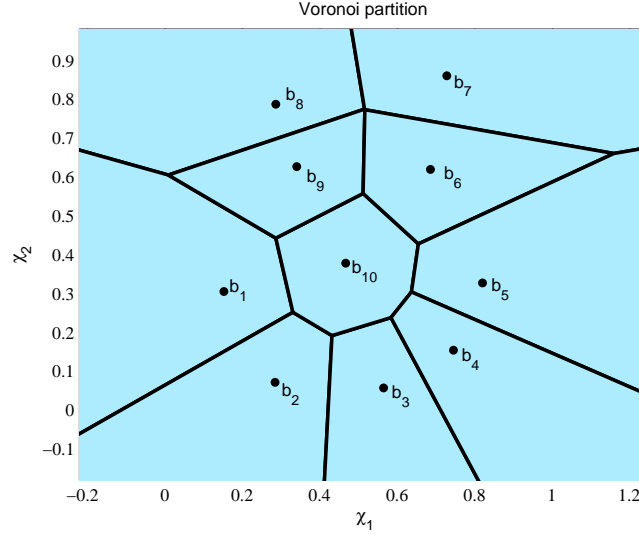
$$\chi^*(x_t) = H^{-1/2} q_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{\chi}(x_t)) = H^{-1/2} q_{\tilde{\mathcal{B}}}(-H^{-1/2}(F^T x_t + f)) \quad (54)$$

where  $\tilde{\mathcal{B}}$  is the correspondent of the set  $\mathcal{B}$  by the transformation  $\tilde{\chi} = H^{1/2} \chi$ .

*Remark :* When defining the mapping (53) the points of the frontier which are equidistant to two or more points in  $\mathcal{B}$  were considered as part of each associated region, fact which can lead to ambiguity. However in practical MPC applications this is not introducing supplementary uncertainty with respect to the original problem (52) solved by any classical iterative optimum searching routine.

The *Voronoi regions* defined by (53) partitioning the arguments space  $\mathbb{R}^p$  induce an equivalent partition of the parameters space  $\mathbb{R}^n$ . This equivalent partition allows a solution written explicitly as a function of parameters :

$$\begin{aligned} \chi^*(x) = b_i \quad \text{for} \quad & \{x \in \mathbb{R}^n : 2(b_i - b_j)^T F^T x \leq b_j^T H b_j - b_i^T H b_i - 2(b_i - b_j)^T f, \\ & \forall b_j \neq b_i, b_j \in \mathcal{B}\} \end{aligned} \quad (55)$$



**Figure 28.** Voronoi partition for a set of points  $b_1, \dots, b_{10}$ .

From a structural point of view, this is a piecewise constant function over polyhedral partitions of the parameters space.

*Remark :* The construction of the Voronoi regions was addressed in several studies, with valuable practical algorithms [194]. However, by remaining in a geometrical and multiparametric programming framework, it is interesting to observe that the Voronoi partition is equivalent to the partition of  $\mathbb{R}^n$  obtained for the explicit solution of the multiparametric linear problem :

$$\begin{aligned} \min z \\ \begin{cases} -z \leq -2b_1^T x + b_1^T * b_1 \\ -z \leq -2b_2^T x + b_2^T * b_2 \\ \vdots \\ -z \leq \quad \quad \quad \vdots \end{cases} \end{aligned} \quad (56)$$

**mpIQP with constraints** A set of linear constraints can be added to the mpIQP problem proposed earlier, obtaining :

$$\begin{aligned} \chi^*(x_t) = \arg \min_{\chi} \quad & \frac{1}{2} \chi^T H \chi + x_t^T F \chi + f^T \chi \\ & A_{in} \chi \leq b_{in}; \quad \text{with } \chi \in \{0, 1\}^p \end{aligned} \quad (57)$$

The construction mechanism for the explicit solution remains the same with the observation that the alphabet of possible realizations of  $\chi$  will be reduced compared to (52), all the combinations which do not satisfy the set of constraints being discarded when constructing the Voronoi partition.

The problem becomes more complex in the case when the parameters vector affects the right hand side of the constraints :

$$\begin{aligned} \chi^*(x_t) &= \arg \min_{\chi} \frac{1}{2} \chi^T H \chi + x_t^T F \chi + f^T \chi \\ A_{in} \chi &\leq B_{in} x_t + b_{in}; \quad \text{with } \chi \in \{0, 1\}^p \end{aligned} \quad (58)$$

In this case the use of a partition of the parameters space corresponding to regular domains of the relaxed parameterized polyhedron

$$\mathcal{P}(x) = \{\chi \in \mathbb{R}^p \mid A_{in} \chi \leq B_{in} x + b_{in}; \quad \chi \in [0, 1]^p\} \quad (59)$$

proves to be an useful tool.

After obtaining the equivalent piecewise regular formulation of the polyhedron based on generators :

$$\mathcal{P}(x) \iff \begin{array}{|c|c|} \hline \text{if } x_t \in R_1 & \mathcal{P}(x) = \left\{ \chi = \sum_{i \in I_{R_1}} \alpha_i \mathbf{v}_i(x), \quad 0 \leq \alpha_i(x) \leq 1, \quad \sum_{i \in I_{R_1}} \alpha_i = 1 \right\} \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \text{if } x_t \in R_{n_r} & \mathcal{P}(x) = \left\{ \chi = \sum_{i \in I_{R_{n_r}}} \alpha_i \mathbf{v}_i(x), \quad 0 \leq \alpha_i(x) \leq 1, \quad \sum_{i \in I_{R_{n_r}}} \alpha_i = 1 \right\} \\ \hline \end{array} \quad (60)$$

similar with the one in Table 2, but restrained to parameterized vertices (no uni/bidirectional rays as is usually the case once the bounding box of relaxed constraints is considered).

Disposing of local constant sets of parameterized vertices, the problem can be solved by reducing it to a known type. Indeed by reinforcing the integer constraints  $\chi \in \{0, 1\}^p$ , one has to retain only those parameterized vertices which satisfy them. Then for each region of the parameters  $R_1, \dots, R_{n_r}$  one has to solve a mpIQP as discussed previously.

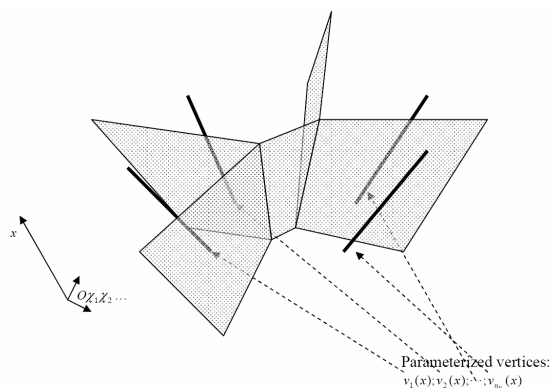
Formally one can rewrite original mpIQP under constraints using this equivalency :

$$\begin{aligned} \chi^*(x_t) &= \arg \min_{\chi} \frac{1}{2} \chi^T H \chi + x_t^T F \chi + f^T \chi \\ A_{in} \chi &\leq B_{in} x_t + b_{in}; \quad \text{with } \chi \in \{0, 1\}^p \end{aligned} \iff$$

$$\iff \begin{array}{|c|c|} \hline \text{if } x_t \in R_1 & \begin{aligned} \chi^*(x_t) &= \arg \min_{\chi} \frac{1}{2} \chi^T H \chi + x_t^T F \chi + f^T \chi \\ \chi &\in \{v_i(x), i \in I_{R_1} \mid v_i(x) \in \{0, 1\}^p\} \end{aligned} \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \text{if } x_t \in R_{n_r} & \begin{aligned} \chi^*(x_t) &= \arg \min_{\chi} \frac{1}{2} \chi^T H \chi + x_t^T F \chi + f^T \chi \\ \chi &\in \{v_i(x), i \in I_{R_{n_r}} \mid v_i(x) \in \{0, 1\}^p\} \end{aligned} \\ \hline \end{array}$$

To resume, in the case of mpIQP with constraints affected by the parametrization, one has to generalize the theory of [256] by taking into account the variation of the alphabet as a function of the vector of parameters. This can be done in two steps by relaxing the constraints, finding the regular domains and the associated parameterized vertices and secondly by solving the mpIQP for

each regular domain using the basic unconstrained method. Overall, the finite alphabet is replaced by a set of integer parameterized vertices (and the Voronoi partitions will be modified in consequence, figure 29).



**Figure 29.** The generalization of the partitions according to the set of integer parameterized vertices.

## II-4.2 Explicit solution for mpMIQP

The multiparametric mixed integer quadratic problem (mpMIQP) is the general optimization framework for which all the previous problems (mpLP, mpQP, mpIQP) can be considered as particularizations :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \chi_c^*(x_t) \\ \chi_l^*(x_t) \end{bmatrix} &= \arg \min_{\begin{bmatrix} \chi_c^T & \chi_l^T \end{bmatrix}^T} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \chi_c^T & \chi_l^T \end{bmatrix}^T H \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} + x_t^T F \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} + f^T \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} \\ A_{in} \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} &\leq B_{in} x_t + b_{in}; \quad \text{with} \quad \chi_c \in \mathbb{R}^{p_c}, \quad \chi_l \in \{0, 1\}^{p_l}, \quad p_c + p_l = p \end{aligned} \quad (61)$$

Several preliminary considerations have to be made before the effective description of the geometrical procedure of explicit solutions construction, first of all, the dual representation for the parameterized polyhedron obtained through the relaxation of the integer constraints in (61). Supposing without loss of generality that no uni/bidirectional rays appear in the set of the generators, the dual representation is :



$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(x) &= \left\{ \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p \mid A_{in} \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} \leq B_{in}x + b_{in}; \quad \chi_l \in [0, 1]^{p_l} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p \mid \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\vartheta} \alpha_i(x) \begin{bmatrix} v_i^c(x) \\ v_i^l(x) \end{bmatrix}, 0 \leq \alpha_i(x) \leq 1, \sum_{i=1}^{\vartheta} \alpha_i(x) = 1 \right\}
\end{aligned} \tag{62}$$

Due to the relaxation, the implicit description of the parameterized polyhedron -  $\mathcal{P}(x)$ , might contain vertices with relaxed logical components which do not satisfy the initial constraints  $v_i^l(x) \in \{0, 1\}^{p_l}$ . Their presence is not affecting the projection mechanisms, or the construction of the Voronoi partitions, but enters in the definition of the regular domains for  $\mathcal{P}(x)$  and the subsequently partition of the parameters space. By discarding them, one can obtain a simplified relaxed polyhedron :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{P}}(x) &= \left\{ \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p \mid \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\vartheta} \alpha_i(x) \begin{bmatrix} \hat{v}_i^c(x) \\ \hat{v}_i^l(x) \end{bmatrix} \right\} \\
0 \leq \alpha_i(x) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{\vartheta} \alpha_i(x) &= 1, \quad \hat{v}_i^l(x) \in \{0, 1\}^{p_l}.
\end{aligned} \tag{63}$$

Once this polyhedron obtained, the explicit solution construction passes by two important phases. First the resolution of the mpQP :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{\chi}_c^*(x_t) \\ \hat{\chi}_l^*(x_t) \end{bmatrix} &= \arg \min_{\begin{bmatrix} \chi_c^T & \chi_l^T \end{bmatrix}^T} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \chi_c^T & \chi_l^T \end{bmatrix}^T H \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} + x_t^T F \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} + f^T \begin{bmatrix} \chi_c \\ \chi_l \end{bmatrix} \\
&\text{subject to } \begin{bmatrix} \chi_c^T & \chi_l^T \end{bmatrix}^T \in \hat{\mathcal{P}}(x)
\end{aligned} \tag{64}$$

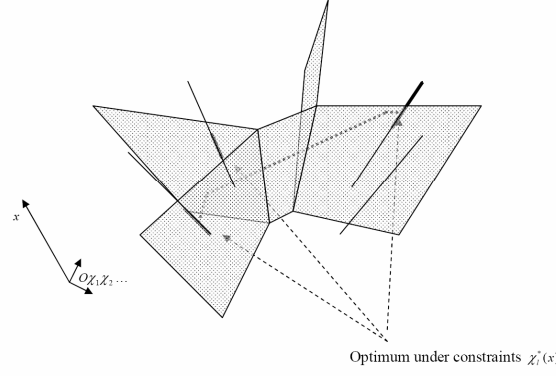
and secondly the identification of regular domains for  $\hat{\mathcal{P}}(x)$  :

$$\hat{\mathcal{P}}(x) \iff \begin{array}{|c|c|} \hline \text{if } x_t \in R_1 & \mathcal{P}(x) = \left\{ \chi = \sum_{i \in I_{R_1}} \alpha_i \begin{bmatrix} \hat{v}_i^c(x) \\ \hat{v}_i^l(x) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum_{i \in I_{R_1}} \alpha_i = 1 \right\} \\ \hline \dots & \dots \\ \hline \text{if } x_t \in R_{n_r} & \mathcal{P}(x) = \left\{ \chi = \sum_{i \in I_{R_{n_r}}} \alpha_i \begin{bmatrix} \hat{v}_i^c(x) \\ \hat{v}_i^l(x) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum_{i \in I_{R_{n_r}}} \alpha_i = 1 \right\} \\ \hline \end{array} \tag{65}$$

and the construction for each sub-domain of a Voronoi partition, covering the entire  $\mathbb{R}^{p_l}$  according to the valid  $\hat{v}_i^l(x)$ .

Finally by positioning the constrained optimum with respect to the Voronoi partitions (figure 8), the explicit optimum for the integer components,  $\chi_l^*(x_t)$  is found. The continuous components are found after solving a simple mpQP for each critical region of the parameters space :

$$\begin{aligned}
\chi_c^*(x_t) &= \sum_{i \in I_{R_j}} \alpha_i^* \hat{v}_i^c(x), \quad \text{with } R_j \text{ such that } x_t \in R_j \\
\alpha_i &= \arg \min_{\alpha_i, i \in I_{R_j}} \left( \hat{\chi}_c^*(x) - \sum_{i \in I_{R_j}} \alpha_i \hat{v}_i^c(x) \right)^T \left( \hat{\chi}_c^*(x) - \sum_{i \in I_{R_j}} \alpha_i \hat{v}_i^c(x) \right) \\
&\text{subject to } 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad \sum_{i \in I_{R_j}} \alpha_i = 1
\end{aligned} \tag{66}$$



**Figure 30.** Fixing the integer variables using the Voronoi partitions and the constrained optimum with relaxation.

By gathering all these operation one can obtain the algorithm for the construction of explicit solutions in the general case of mpMIQP.

**Procedure :**

1. Store the original problem (61) and the associated set of constraints.
2. Relax the constraints on the binary variables (replace them by interval constraints,  $\chi_i \in [0, 1]^{p_i}$ ).
3. Construct the dual representation in terms of generators for the relaxed parameterized polyhedron (62).
4. Discard the parameterized vertices which do not respect the integer constraints (63).
5. Split  $\hat{\mathcal{P}}(x)$  in regular domains, and store the associated partition of the parameters space  $\{R_1, R_2, \dots, R_{n_r}\} \subset \mathbb{R}^n$ , (65).
6. For each  $R_j, j \in \{1, \dots, n_r\}$  build the Voronoi partition of  $[0, 1]^{p_i}$  according to the valid vertices  $v_i^l(x)$  with  $i \in I_{R_j}$ .
7. Build the explicit solution mpQP obtained by relaxation, (64).
8. Use the explicit solution obtained at step 7 and intersect it with the Voronoi partitions constructed at step 6.1. For each non-empty intersection :
  - 8.1 Fix the integer arguments to the values associated with the parameterized vertex which generated the Voronoi partition.
  - 8.2 Solve the mpQP (66) in order to obtain the continuous part of the arguments.
  - 8.3 The region of the parameters space where the obtained affine function of parameters is optimum is given by the projection of the non-empty intersection found at step 8 onto  $\mathbb{R}^n$ .
9. Store the global piecewise affine optimum as a look-up table of local affine functions of the vector of parameters  $x_t$ .

### II-4.3 Numerical illustration of the procedure

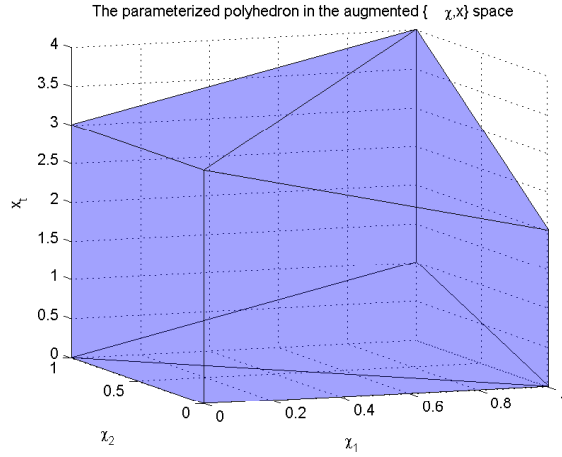
*Example :* Consider the parametric MIQP :

$$\min_{\chi} 0.5\chi^T \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \chi + \chi^T \begin{bmatrix} -0.4 \\ -1.7 \end{bmatrix} x$$

subject to :

$$\begin{array}{rclcl}
-\chi_1 & & \geq & -1 & \\
& -\chi_2 & \geq & -1 & \\
-3\chi_1 & -7\chi_2 & \geq & -3x & -7 \\
\chi_1 & & \geq & 0 & \\
& \chi_2 & \geq & 0 & \\
-5\chi_1 & -\chi_2 & \geq & -x & -5 \\
& 4\chi_2 & \geq & -x & \\
4\chi_1 & & \geq & -3x & \\
-\chi_1 & +9\chi_2 & \geq & x & -3 \\
2\chi_1 & & \geq & x & -3 \\
-8\chi_1 & +2\chi_2 & \geq & x & -10 \\
\chi_1 & -\chi_2 & \geq & x & -4
\end{array} \tag{67}$$

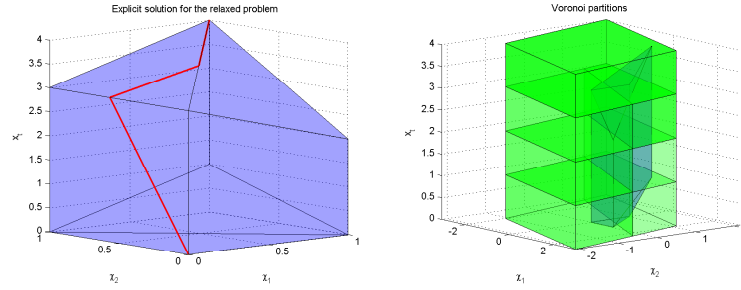
**The case  $\chi \in \mathbb{R} \times \{0, 1\}$**  By relaxing in a first stage the integer constraint  $\chi_2 \in \{0, 1\}$  one can obtain a parameterized polyhedron with 10 parameterized vertices (figure 9).



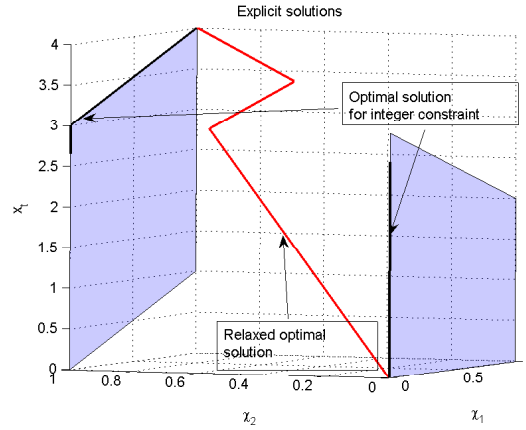
**Figure 31.** The polyhedral domain domain after relaxation.

The parameterized polyhedron double representation can be used for the construction of the explicit solution (figure 10, left), while the inclusion of  $\chi_2$  to a finite alphabet constraints will be used for the construction of the Voronoi partition of the augmented space  $\{\chi, x\}$  (figure 10, right).

The explicit solution for the original problem will then be found by reporting the relaxed piecewise linear solution of the relaxed problem to the Voronoi partition (figure 11).



**Figure 32.** Left : the explicit solution for the relaxed problem. Right : the Voronoi partition.



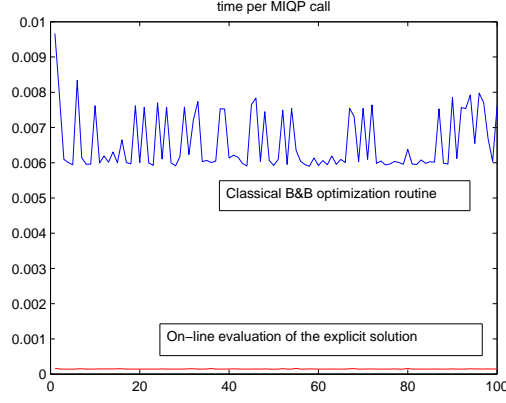
**Figure 33.** The explicit solution for the parametric mixed integer quadratic problem.

Figure 12 presents the time per call for 100 values of the parameter, in a first instant by appealing to classical Branch&Bound solvers and secondly using the explicit solution.

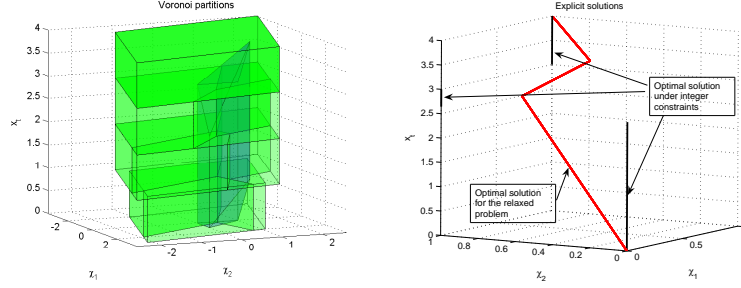
**The case  $\chi \in \{0, 1\}^2$**  In the case when both the optimization arguments have to satisfy integer constraints, the solution will be a piecewise constant function (in  $\{0, 1\}^2$ ) as it can be seen in figure 13 (to be compared with figure 11).

## II-5 Genetic algorithms

The main drawback of the classical implementation of predictive control schemes upon B&B optimisation techniques is the exponential complexity with the number of binary optimization variables. In this section, an analysis of the



**Figure 34.** The polyhedral domain domain after relaxation.



**Figure 35.** The polyhedral domain domain after relaxation.

computational difficulties is first completed, the genetic algorithm strategy is then proposed as an alternative technique to solve the optimization problem equation 45 without facing the exponential complexity.

### II-5.1 Computational aspects

Recalling the structure of the optimization problem equations 79, 48, two important remarks should be formulated about the number of binary optimization variables  $L = N_u m_l + N r_l$ , which is as mentioned earlier critical for the computational burden.

*Remark 1.* From the computational point of view, the main disadvantage comes from the fact that a  $(\delta, \mathbf{z})$  optimization problem in a  $\mathbb{R}^{N_u m_c + N r_c} \times \{0, 1\}^{N_u m_l + N r_l}$  dimension space has to be solved, instead of an  $(\delta, \mathbf{z})$  relaxed optimization problem in a  $\mathbb{R}^{N_u m_c} \times \{0, 1\}^{N_u m_l}$  dimension space. This latter should have been sufficient as the  $N r_l + N r_c$  variables are uniquely defined by the system inequalities of 44 due to the "well posed assumption" of the MLD form.

*Remark 2.* The power of predictive control schemes comes from their capability to provide optimal control sequences based on long range prediction horizons. Nevertheless, as the number of binary optimization variables  $L$  is in direct dependence with the length of the receding horizon, the prediction horizon  $N$  is forced for computational reasons to a small value, resulting in canceling the main advantage of the model based predictive philosophy.

These two remarks are the main arguments to search other alternative optimization techniques that can replace the classical approach (B&B method), satisfying the following principles :

- The optimization arguments are represented exclusively by the input control actions along the prediction horizon (i.e. the length of the binary part of the optimization vector should be  $N_u m_l$ )
- The complexity of the optimization routine should avoid the exponential complexity with respect to the length of the prediction horizon  $N$ .

In the following, the genetic algorithms will be examined as a stochastic method to solve the optimization problem of MPC for the MLD form. Studies showed that even if the GAs have a limitation from the optimality point of view, offering no guarantee of it, they are suitable for a large class of optimization problems.

## II-5.2 Genetic algorithms technique

The original concept of genetic algorithms was first introduced in the 1970s by John Holland of the University of Michigan [189], [206] and [281]. The basic principle is as follows : a random number generator is used to generate a finite set of random design variable vectors, which are referred to as individuals, genotypes, structures, strings or chromosomes. A set of individuals is called a population. For each individual in the population, the objective function value (or fitness) is calculated. Individuals with a higher fitness are more likely to be chosen for reproduction. Single variables of the chosen individuals are then randomly mutated and crossovers between two parent individuals are performed on parts of the chromosomes. The resulting population generation is then examined as a basis for the next optimization cycle. The algorithm is stopped after a specified number of generations or a certain convergence development, and the individual that has produced the best value of the objective function is considered as output.

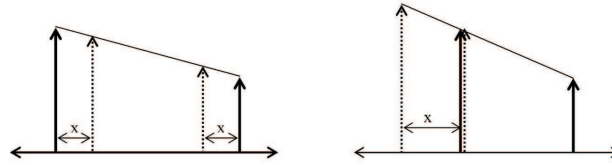
In the original context, genetic algorithms worked on individuals consisting of binary design variables. Michalewicz introduced a type of genetic algorithm that works directly on continuous (or floating point) individuals [236]. The two basic types only differ in the mutation and crossover operators, while initialization, selection and termination methods remain the same.

**Initialization :** it is completed by generating a random initial population. According to the kind of algorithm (binary or floating point), individuals consist of binary numbers, or floating point numbers within the range defined for each design variable separately. For each individual, the fitness is calculated using the objective function.

**Selection :** for each generation, individuals are chosen to serve as parents for the next generations. In general, individuals with a higher fitness are more likely to be chosen for reproduction.

**Crossover :** a probability or a number of crossovers is defined a priori. A random pair of individuals is then chosen to perform crossover. Among the various strategies, the most common are :

- Simple crossover : the operator swaps randomly chosen variables from the two parents to produce two children ;
- Arithmetic crossover : two chosen variables are interpolated by a random amount, thus moving the two parent values closer to each other. This structure only works with floating point representation. A visualisation of the operator functionality is presented in Figure 36(a) ;
- Heuristic crossover : using the two chosen variables, a randomly-sized extrapolation is performed in the direction of the variable belonging to the individual possessing the greater fitness, as shown Figure 36(b).



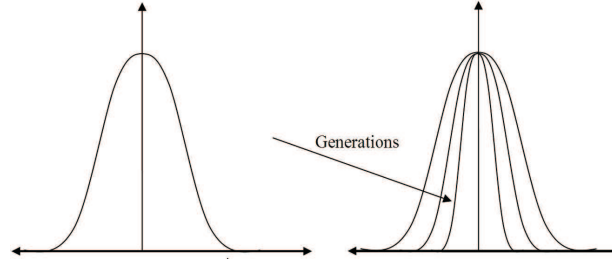
**Figure 36.** Genetic crossover operators ((a) Arithmetic, (b) Heuristic) - Wide lines represent parent values, thin lines represent children.

**Mutation :** a single individual is randomly chosen. The value of a single variable is then mutated according to the chosen mutation operator :

- Bit-Flip : the value of a binary variable is inverted from 0 to 1 or 1 to 0, respectively ;
- Uniform : a random value within the variable range is chosen as a new value ;
- Gaussian : a new value is chosen based on a Gaussian distribution around the parent value. Its functionality is illustrated in Figure 37(a) ;
- Non-Uniform : the new value is randomly chosen based on a Gaussian distribution around the parent value, its standard deviation decreases with increasing generation numbers. It is illustrated in Figure 37(b).

Bit-Flip mutation only works with binary representation while the three others only accept floating point representation.

**Termination :** in the ideal case, the genetic algorithm would determine when it has found the global optimum, would stop iterations and output the optimum. Unfortunately, the value of the global optimum (the fitness value corresponding to the best set of input variables) is almost never known. Several methods have been developed to trigger termination of the genetic algorithm optimization procedure :



**Figure 37.** Genetic mutation operators ((a) Gaussian, (b) non uniform) - The vertical line represents the parent value, the bell curve the probability distribution.

- Generation number : execution is stopped after a predefined number of generations. This value should be based on the number of input variables and the input variables' ranges.
- Fitness threshold : a threshold can be selected before execution. If a fitness value is found that exceeds the threshold, execution is terminated. This should be used in combination with the generation number termination method in case the threshold is not reached.
- Fitness convergence : when the difference between a filter smoothing over a large number of past generations and a filter smoothing over a small number of past generations falls below a pre-defined percentage, the program is terminated.
- Population convergence : if the average population fitness falls below a pre-defined percentage below the best individual, the population is considered converged.

Finally, the tuning of the GA requires the choice of the variable type and related bounds, the crossover and mutation operators, the population size (affecting the quality of the optimality), the number of maximal genetic operations and the termination criteria.

Genetic algorithms are able to process either binary or continuous individuals. However, variables of different types generally cannot be mixed due to limitations of current genetic algorithm implementations. The classical approach is to transfer all variable types to binary design variables, either explicitly, or through a user interface, as it was realized for the Matlab Genetic Algorithm Optimization Toolbox (GAOT) [227]. In this case, the value of the continuous variable is calculated as :

$$v_c = l_{\min} + \frac{l_{\max} - l_{\min}}{2^b} \cdot v_b \quad (68)$$

where  $v_c$  is the continuous value,  $v_b$  is the binary value,  $l_{\min}$  the lower variable limit,  $l_{\max}$  the upper limit and  $b$  the number of bits.

In fact, this discretization realized by the interface in a transparent way is not necessary adapted to the problem considered by the user.



### II-5.3 Genetic algorithms linked to the MLD form

In the case of predictive control for systems under the MLD form and with genetic algorithms as optimization strategy, the optimization vector is restricted to :

$$\chi^* = [\mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k + N_u - 1)]^T \quad (69)$$

The parameters of the function to be minimized are the current states and the input control variables only. The evaluation function is  $F(\chi, x_0)$  defined as in equation 79. The auxiliary binary and continuous variables of  $\chi$ , for evaluation of  $F(\chi, x_0)$ , are determined by solving a MILP problem for the equality and inequality constraints of the form  $\mathbf{c}\chi < \mathbf{b}$  in equation 44, over the prediction horizon  $N$ . It must be reminded that once the current states and the input sequence are known, the auxiliary variables are uniquely defined according to the "well posed" aspect. Note that in this technique, no auxiliary variables are optimized, as the GA does not depend upon the structure of the cost function, the only requirement being the possibility of evaluation of the cost function for a particular parameter combination.

The population is created on the input variables space over the chosen control horizon  $N_u$ ,  $\mathbf{u}_k^{k+N_u-1} = [\mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k + N_u - 1)]^T$  where the vectors  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_c \ \mathbf{u}_l]^T$  contain the continuous and binary control actions. Any individual of this population is a candidate solution for the next iteration step.

Genetic algorithms, as optimization routine in conjunction with the predictive control strategy for MLD form, could offer a new alternative to the binary optimization problems while avoiding the exponential complexity of Branch & Bound technique. In this point, it can be concluded that the GA methods satisfy the requirements defined at the end of section 4.1. These requirements are fulfilled by avoiding the analytical optimization techniques based on the structural properties of the optimization problem and replacing them with the particular evaluation of the cost function. The exponential complexity is dodged by providing suboptimal solutions.

Genetic algorithms can be used with the classical MLD model without any modification, i.e. having as arguments mixed variables : binary and continuous variables where the continuous variables are transformed and calculated as explained before equation (5), but this may lead to a loss of accuracy through quantification of the continuous control actions. With this remark, an intelligent discretization prior to the effective GA optimization may improve the global optimality of the solution. That is the reason why the following section describes a modified MLD form leading to a time-varying Quadratic (0,1) optimization problem instead of a MIQP structure. These transformations do not change the complexity of the GA to be solved but replace the implicit blind quantification of the continuous control variables with an adaptive discretization technique, which improve the control performances even with a small number of discretized variables.

## II-5.4 Modified MLD form

A new feature in discrete optimization problem for MPC is the introduction of a set of incremental control alternatives. Starting from the MLD form, all the continuous intervals must be converted in such sets.

**Discretization of continuous variables of the MLD form** The MLD form equation 44 clearly shows that variables vectors either include a continuous part  $\mathbf{u}_c \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^{n_c}$ ,  $\mathbf{x}_c \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^{m_c}$ ,  $\mathbf{y}_c \in \mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^{p_c}$  or are completely continuous  $\mathbf{z} \in \mathbf{Z} \subset \mathbb{R}^{r_c}$ . The goal is to replace the continuous intervals  $\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  by corresponding sets of discrete values  $\mathbf{X}^d, \mathbf{U}^d, \mathbf{Y}^d, \mathbf{Z}^d$ . The discretization implies that at each sampling time, the inputs  $\mathbf{u}_c^d(k)$  will lie inside a set of discrete control alternatives  $\mathbf{U}^d$  instead of a real value inside the continuous interval  $\mathbf{U}$ . Discretizing the control variables in  $M$  possible alternatives  $\mathbf{u}_{cj}^d$  leads to the control actions set described by :

$$\mathbf{U}^d = \{ \mathbf{u}_{cj}^d \mid j = 1, 2, \dots, M \} \quad (70)$$

In order to illustrate the method, a continuous interval of control actions  $\mathbf{U} = [u_0, u_f] \in \mathbb{R}$  will be taken as example. It must be transformed into a set of discrete real values. An option is to split the interval in a homogeneous way. Supposing  $M = 2^n$  the number of linearly distributed values, the set  $\mathbf{U}^d = \{u_{c0}^d, u_{c1}^d, \dots, u_{c2^n-1}^d\}$  will replace the interval  $\mathbf{U}$  with

$$u_c^d(k) = u_0 + (2^k - 1) \frac{u_f - u_0}{2^n - 1} \quad (71)$$

where  $k = 0, 1, \dots, n$ . The continuous value is then substituted by  $n$  binary variables  $[d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{n-1}]^T \in \{0, 1\}^n$ , coding  $u_c^d(k) \in \mathbf{U}^d$ .

It can be proved that knowing the current state  $\mathbf{x}(k)$  and applying a discretized input, the updated state will have the possibility to evolve only in a well defined set of discrete values ("well posed" assumption). The following result concerns the implicit discretization of the sets  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ .

**Theorem 1.** *The discretization of the continuous control actions induces a discrete set for all the other continuous variables. For each logical control value combination  $u_l$ , the induced discretized sets satisfy :  $\text{card} \mathbf{U}^d \geq \text{card} \mathbf{X}^d$ ,  $\text{card} \mathbf{U}^d \geq \text{card} \mathbf{Y}^d$ ,  $\text{card} \mathbf{U}^d \geq \text{card} \mathbf{Z}^d$ .*

**Proof :** At instant  $k$  the current state of the system  $\mathbf{x}(k)$  is known together with a discretization of the control actions in  $M = 2^n$  alternatives for each input, such that  $\text{card} \mathbf{U}^d = M$ . For every  $u_c^d(k) \in \mathbf{U}^d$  a unique pair  $(\delta^d(k), \mathbf{z}^d(k))$  can be defined from the system inequality equation :

$$\mathbf{E}_2 \delta^d(k) + \mathbf{E}_3 \mathbf{z}^d(k) \leq \mathbf{E}_1 \mathbf{u}^d(k) + \mathbf{E}_4 \mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_5 \quad (72)$$

due to the "well posed" assumption of the MLD form, where  $\mathbf{u}^d = [\mathbf{u}_c^d \ \mathbf{u}_l]^T$ . Introducing these values in the following equations, the future state and output

are found subsequently :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^d(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}^d(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{u}^d(k) + \mathbf{B}_2\delta^d(k) + \mathbf{B}_3\mathbf{z}^d(k) \\ \mathbf{y}^d(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}^d(k) + \mathbf{D}_1\mathbf{u}^d(k) + \mathbf{D}_2\delta^d(k) + \mathbf{D}_3\mathbf{z}^d(k) \end{aligned} \quad (73)$$

The relation between the discrete inputs and all other (real or logical) variables can be rewritten as  $\mathbf{u}_c^d \in \mathbf{U}^d \longrightarrow \mathbf{u}^d(\delta^d, \mathbf{z}^d, \mathbf{x}^d, \mathbf{y}^d) \in \{0, 1\}^{r_l} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$  where  $\mathbf{x}^d = [\mathbf{x}_c^d \ \mathbf{x}_l^d]^T$ ,  $\mathbf{y}^d = [\mathbf{y}_c^d \ \mathbf{y}_l^d]^T$ . This means that we are dealing with a mapping  $F : \mathbf{U}^d \longrightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ . Noting  $\mathbf{X}^d = \text{Pr}_X \text{Im}(F)$ , it can be seen that the MLD form is an application  $T : \mathbf{U}^d \longrightarrow \mathbf{X}^d$ . From the surjectivity of  $T$  comes the conclusion that  $\text{card}\mathbf{U}^d \geq \text{card}\mathbf{X}^d$ . In the same way  $\mathbf{Y}^d, \mathbf{Z}^d$  can be found which completes the proof.  $\square$

By induction it can be proved that discretized control sets will induce for further sample times the discretization of the continuous intervals. It must be noticed that advancing in time the topology and the cardinality of these sets change as consequence of the new input alternatives available. This means that the control design procedure has to focus only on the discretization of the control actions as it leads to discretization of all other continuous sets  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ .

The time-invariant discretization by means of linearly distributed values is also the usual kind of technique that genetic algorithms employ in order to transform the mixed optimization problem in a discrete optimization one.

An important note is that the transformation of continuous control actions to a small discrete set can cause chattering or overshoots on the response. In the following subsection, a solution to this problem is proposed by scaling control actions set. Considering such techniques, the discretization is performed in an adaptive manner, allowing the genetic algorithms to approach the global optimum of the predictive control law criterion.

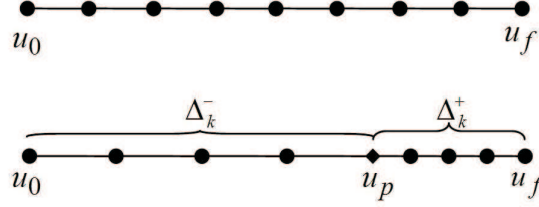
### II-5.5 Fuzzy predictive filter

In order to overcome these difficulties of degraded performances, while keeping a small discretized set, a fuzzy filter is used combined with an adaptation technique. As shown in [184] there are two approaches for scaling the discrete sets : fuzzy predictive filters and discrete alternatives based on fuzzy rules. The first one is described here. The design process includes the choice of the adaptive control actions, and the construction of the fuzzy criteria for scaling purposes.

**Adaptive distribution of control increments** One major disadvantage of the homogeneous discretization is the conservativeness of the discrete alternatives. This can be avoided by the adaptation of the control increments as a function of the previous sample time value as stated in Figure 38.

Let  $u_c^d(k-1) = u_p(k-1) \in \mathbf{U}$  represent the control action at instant  $k-1$ , where  $\mathbf{U} = [u_0, u_f]$  is the domain for a continuous variable. Let also the upper and lower bounds of the possible variation in the control signal at time  $k$  be  $\Delta_k^-$  and  $\Delta_k^+$  respectively, where :

$$\Delta_k^+ = u_f - u_p(k-1), \quad \Delta_k^- = u_p(k-1) - u_0 \quad (74)$$



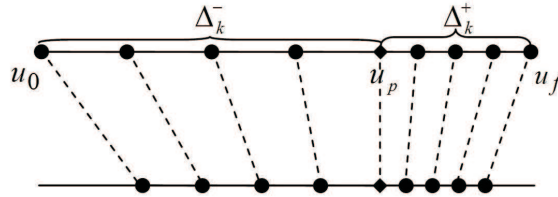
**Figure 38.** Linear discretization by subintervals.

The set of adaptive incremental control alternatives is :

$$\mathbf{U}^d(k) = \{0, \gamma_j \Delta_k^+, \gamma_j \Delta_k^- \mid j = 1, 2, \dots, l\} \quad (75)$$

where the coefficients  $\gamma_j \in [0, 1]$  are fixed and describe a linear distribution upon the continuous subsets available in relation with the previous control action. The  $\gamma_j$  coefficients must thus be chosen instead of choosing fix alternatives as in equation 71. Their choice imposes the changes allowed by scaling the maximum variation  $\Delta_k^+$  and  $\Delta_k^-$  and  $l$  represents the number of possible positive/negative control actions. For a practical implementation, these control actions are coded with  $p$  binary variables such that  $l = 2^{p-1} - 1$ .

**Fuzzy scaling factors** Even if the previous technique improves the quality of the control actions, once approaching steady state the control alternatives do not change, and do not permit fine control adjustments. To avoid this problem, a scaling factor  $\lambda \in [0, 1]$  is introduced, which will modify the subintervals length according to the tracking error (Figure 39).

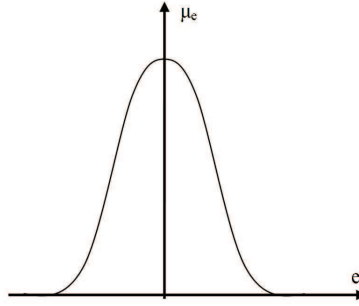


**Figure 39.** Linear discretization by scaled subintervals.

The scaling factor  $\lambda$  is time-variant, recomputed at each instant  $k$  by a simple fuzzy criterion based for instance on the predicted error  $e(k + N - 1 | k)$ , on the error variation  $\Delta e(k) = e(k) - e(k - 1)$  or on the setpoint variations, scaling the previous introduced set of control updates :

$$\mathbf{U}^{d*}(k) = \lambda(k) \mathbf{U}^d(k), \quad \lambda(k) \in [0, 1] \quad (76)$$

When the error and the error variation are small, the hybrid system is close to a steady state situation, and the discretized control alternatives corresponding to the former continuous inputs should be scaled down to allow tighter control actions, i.e.  $\lambda \rightarrow 0$ . In the same manner when they have higher values, an important corrective variation should be available, i.e.  $\lambda \rightarrow 1$ . Fuzzy criteria have to be designed in order to follow the simultaneous fulfillment of the "small predicted error" and "small error variation" goals described by the membership functions  $\mu_e$  and  $\mu_{\Delta e}$  respectively. Figure 40 gives an example of such a membership function.



**Figure 40.** Membership function example.

Generally, a weighted conjunction between these two fuzzy criteria could be used :

$$\mu_\lambda = \mu_e \wedge \mu_{\Delta e} \quad (77)$$

The gain  $\lambda$  privileges large variations when the degree of fulfillment for  $\mu_\lambda$  is reduced. Following this idea  $\lambda$  is defined as the fuzzy complement :

$$\lambda = \overline{\mu_\lambda} = 1 - \mu_\lambda \quad (78)$$

The combination of an adaptive set of incremental control alternatives and fuzzy criteria for scaling them forms a fuzzy predictive filter. The filter reduces the problem introduced by the discretization while at the same time providing a set of adaptive alternatives that overcomes the lack of freedom related to a small number of discrete values. This small number of possible control actions being kept low speeds up the optimization.

## II-5.6 Implementation issues

The modified MLD form for hybrid system presented in the previous subsection depends on the value of the previous control actions and scaling factors that are recomputed at each sampling period. Thus denoting the MLD system at instant  $k$  by  $\Sigma_{MLD}(k)$ , its evolution can be written under the following relation :

$$\Sigma_{MLD}(k) = \Sigma_{MLD}(u_p(k-1), \lambda(k)) \quad (79)$$

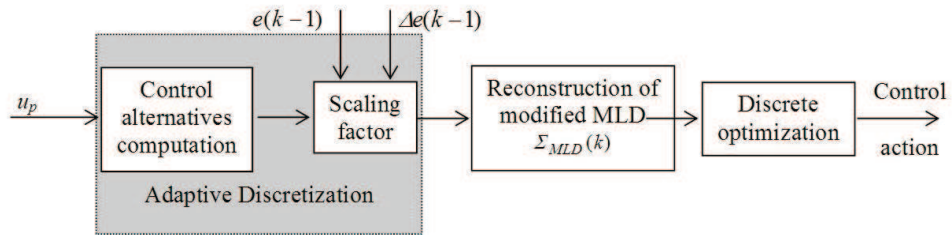
which means that the MLD form is recomputed at each sampling time. In other words, from the implementation point of view, the classical MLD form has been replaced by a new time-varying version. This can be implemented through the specification language HYSDEL (Hybrid System Description Language) [168] as follows. The upper and lower bound of the continuous interval of each continuous control variable  $u_0$  and  $u_f$  are defined globally (once) in the HYSDEL language, while the previous control action  $u_p(k-1)$  and the fuzzy scaling factors  $\lambda$  are defined as a real parameter. So the corresponding continuous control variable  $u_{ci}$  is represented by :

$$u_{ci}(k) = u_{pi}(k-1) + s_i(k) \lambda_i(k) \underbrace{\frac{\Theta_i \psi_i(k)}{2^{p_i-1} - 1}}_{\gamma_i} \Delta_{ki}^+ + (1 - s_i(k)) \lambda_i(k) \underbrace{\frac{\Theta_i \psi_i(k)}{2^{p_i-1} - 1}}_{\gamma_i} \Delta_{ki}^- \quad (80)$$

where :  $\Theta_i = [2^0 \ 2^1 \ \dots \ 2^{p_i-2}]$ ,  $\psi_i(k) = [d_0 \ d_1 \ \dots \ d_{p_i-2}]^T \in [0, 1]^{p_i-1}$

$s_i \in \{0, 1\}$  representing the sign of the control action is considered as a binary optimization variable. The direct specification of the dynamics of the MLD system using the form equation 80 is not possible because the term  $u_p(k-1)$  can not be implemented into the HYSDEL current version. Consequently, the easiest way to overcome this difficulty is to treat  $u_p(k-1)$  as an additional continuous auxiliary variable, which has no impact on the complexity of the MLD model and on the computational burden.

Once the modified MLD form completely described, a routine, which performs the evaluation for the genetic algorithm, has to be created. This routine interprets the GA at each iteration, solving a MILP problem for the equality and inequality equations of the MLD form. It results in the response to the  $\delta^d, \mathbf{z}^d, \mathbf{x}^d, \mathbf{y}^d$  values and then the evaluation of the cost function equation 45. The whole control design procedure described above is summarized in the diagram of Figure 41.



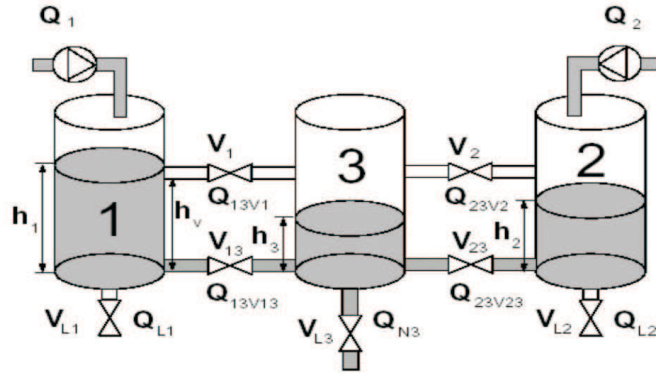
**Figure 41.** Control scheme including the modified MLD form

An important note is that the number of binary variables, coding the discrete alternatives, could be chosen as small as 2 or 3 without loss of performances.

Such choices offer good precision in general cases due to the adaptive mechanism introduced by the adaptive distribution of control increment  $\gamma_j \Delta^{+/-}$  and the fuzzy scaling factors  $\lambda$ , while decreasing the computational time and complexity.

## II-6 Application

The previously described predictive control strategy is applied to the three tanks benchmark system presented in [187]. The details of the classical MLD model for the three tanks benchmark can be found in [166].



**Figure 42.** Three tanks benchmark system.

### II-6.1 Benchmark description

The tanks 1 and 2 in Figure 42 are loaded through the two flow inputs denoted by  $Q_1$  and  $Q_2$  taking continuous values between 0 and  $Q_{max}$ . All the valves  $V_1, V_2, V_{13}, V_{23}, V_{L1}, V_{L2}$  and  $V_{L3}$  are on-off type. The valves  $V_{L1}$  and  $V_{L2}$  remain closed and  $V_{L3}$  open. The objective is to maintain a predefined constant level into the tank 3. The state space vector includes the water levels in the tanks  $h_1, h_2$  and  $h_3$ . The mass conservation gives the following differential equation :

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \frac{1}{A} (Q_1 - Q_{13V1} - Q_{13V13}) \\ \dot{h}_2 &= \frac{1}{A} (Q_2 - Q_{23V2} - Q_{23V23}) \\ \dot{h}_3 &= \frac{1}{A} (Q_{13V1} + Q_{13V13} + Q_{23V2} + Q_{23V23} - Q_N) \end{aligned} \quad (81)$$

where  $Q_{ij}$  are the flows and  $A$  is the section of each tank. Using Toricelli's law and linearizing the flows leads to :

$$\begin{aligned} Q_{i3V13} &\approx k_{i3} V_{i3} (h_i - h_3) \\ Q_{i3V_i} &\approx k_i V_i (\max(h_v, h_i) - \max(h_v, h_3)) \\ Q_{N3} &\approx k_{N3} V_{L3} h_3 \end{aligned} \quad (82)$$

where :  $k_{i3} = a_z S_{i3} \sqrt{\frac{2g}{h_{\max}}}$ ,  $i = 1, 2, k_i = a_z S_i \sqrt{\frac{2g}{h_{\max} - h_v}}$ ,  $k_{N3} = a_z S_{N3} \sqrt{\frac{2g}{h_{\max}}}$

The MLD model implies the following set of variables :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [h_1 h_2 h_3]^T \\ \mathbf{u} &= [Q_1 Q_2 V_1 V_2 V_{13} V_{23}]^T \\ \delta &= [\delta_{01} \delta_{02} \delta_{03}]^T \\ \mathbf{z} &= [z_{01} z_{02} z_{03} z_1 z_2 z_{13} z_{23}]^T \end{aligned} \quad (83)$$

with :

$$\begin{aligned} [\delta_{0i}(t) = 1] &\leftrightarrow [h_i(t) \geq h_v] \quad i = 1, 2, 3 \\ z_{0i}(t) &= \delta_{0i}(t) (h_i(t) - h_v) \quad i = 1, 2, 3 \\ z_i(t) &= V_i (z_{0i}(t) - z_{03}(t)) \quad i = 1, 2 \\ z_{i3}(t) &= V_{i3} (h_i(t) - h_3) \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (84)$$

### II-6.2 Modified MLD form of the three tanks benchmark

Following the technique presented before, the inputs  $Q_1$  and  $Q_2$  are discretized and coded by three binary variables including the sign ( $p = 3$ ), as follows :

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= \pm \lambda_1 \frac{2^1 d_{11} + 2^0 d_{12}}{(2^2 - 1)} \Delta_{k1}^{+/-} \\ \Delta Q_2 &= \pm \lambda_2 \frac{2^1 d_{21} + 2^0 d_{22}}{(2^2 - 1)} \Delta_{k2}^{+/-} \end{aligned} \quad (85)$$

with  $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} \in \{0, 1\}$  and the scaling factors  $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$  recomputed at each instant  $k$  by fuzzy rules.

The variable giving the sign of the variation for the control actions,  $\lambda_j \Delta_k^+$  or  $\lambda_j \Delta_k^-$ , represents an optimization variable. In conclusion, the modified MLD form has as input the following vector :

$$\mathbf{u} = [s_1 \ d_{11} \ d_{12} \ s_2 \ d_{21} \ d_{22} \ V_1 V_2 V_{13} V_{23}]^T \quad (86)$$

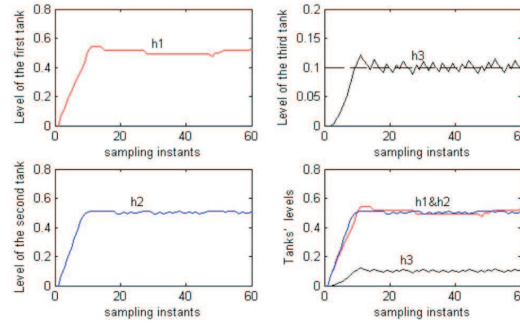
### II-6.3 Simulation results

Let consider now the following specification : starting from zero levels (the three tanks being completely empty), the objective of the control strategy is to reach the liquid levels  $h_1 = 0.5\text{m}$ ,  $h_2 = 0.5\text{m}$ , and  $h_3 = 0.1\text{m}$ . According to the known specified levels, fuzzy criteria based on Gaussian membership functions similar to those given in Figure 40 are designed. The genetic algorithm for the optimization problem of equation 45, under the dynamic constraints described with the modified MLD model, has been applied in simulation to reach the level specification previously given with the two prediction horizons  $N = 2$  and  $N_u = 2$ . The results are presented on Figure 43 for the three tanks levels and on Figure 44 for the control signals.

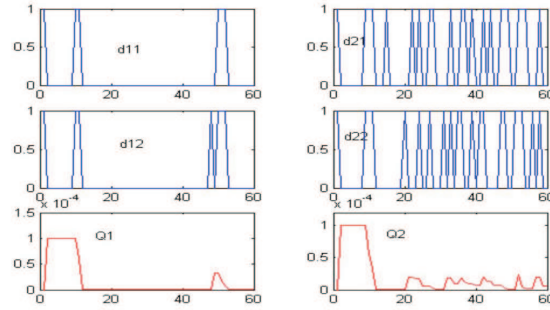
The level in the third tank is oscillating around  $0.1\text{m}$ , since  $h_3 = 0.1\text{m}$  is not an equilibrium point. The continuous signals  $Q_1$  and  $Q_2$  shown in Figure 44 have various values introduced by the adaptive effect, proving the freedom brought in



by the intelligent discretization procedure. For a comparison purpose, Figures 43 and 44 present results obtained for the same tuning  $N = N_u = 2$  with a classical approach including B&B optimization. The sub-optimality of the GA strategy does not affect the observed performance.



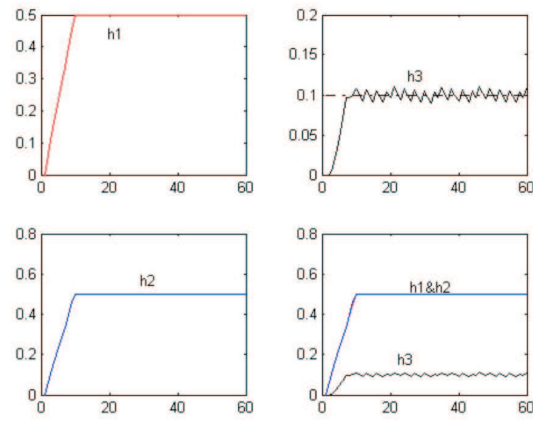
**Figure 43.** Water levels in the three tanks.



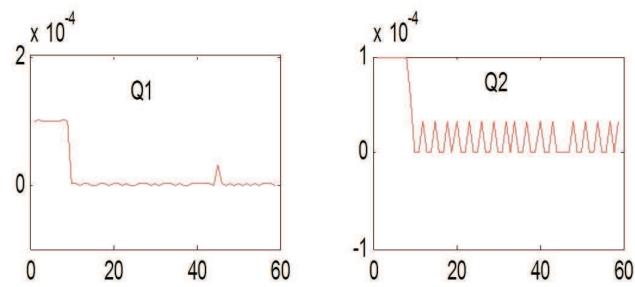
**Figure 44.** Controlled variables.

The following problem, where the valves  $V_{L1}$  and  $V_{L2}$  are not forced to be closed and the specifications levels are  $h_1 = 0.1\text{m}$ ,  $h_2 = 0.1\text{m}$ , and  $h_3 = 0.2\text{m}$ , is impossible to solve in reasonable time with MIQP solvers for the MLD form because it demands a large prediction horizon. Due to the restricted computational time obtained with the GA technique, this problem can now be solved for  $N = 5$ ,  $N_u = 2$ , where the number of binary variables of the modified MLD model is 10 (equation 86). The results are presented in Figure 47.

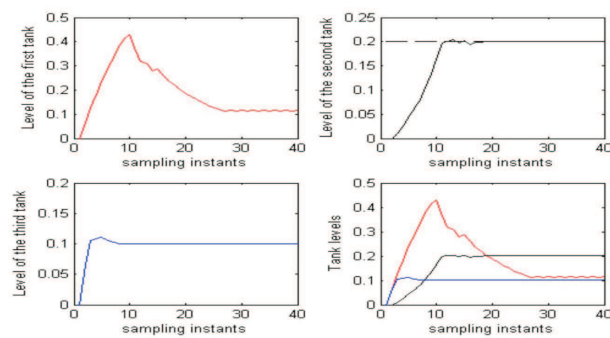
An evaluation of the computation times was performed with the benchmark under the first configuration, running Matlab 6.5 on an AMD 2.1GHz machine



**Figure 45.** Water levels in the three tanks. "Classical" approach .



**Figure 46.** Continuous controlled variables. "Classical" approach .



**Figure 47.** Water levels in the three tanks.

and by solving the optimization problem with a GA Matlab routine [210]. No modification of the Matlab routine in order to optimize the implementation of the algorithm or its efficiency was realized. The genetic algorithm solver works in this case with a population of 80 individuals, a threshold of  $1e - 6$  and a maximal number of genetic operations varying from 50 to 100. The number of binary variables is restricted here to  $8N_u$ . Table 1 gives the computational times for predictive control problems for different prediction and control horizons.

**Table 2.** Computational times (sec.) for predictive control problems for different prediction and control horizons

	$N$	1	2	3	4	5	6
$N_u$ (# of binary variables)							
1	8	16.20	18.37	20.58	23.20	25.21	26.66
2	16	X	50.66	57.25	64.15	70.86	78.58
3	24	X	X	77.50	84.73	96.33	105.33
4	32	X	X	X	105.08	117.08	128.50
5	40	X	X	X	X	131.87	147.15

From Table 1, it is clear that the genetic algorithm with the technique described before is more effective with the long prediction and control horizon, i.e. with a large number of binary variables rather than with a small number of binary optimization variables, as the complexity depends linearly on the number of binary variables.

# ***Partie III : La commande prédictive des systèmes avec l'entrée affectée par un retard variable. Sur la construction des modèles linéaires affectés par l'incertitude polytopique et les connexions avec la commande prédictive robuste.***

**Resumé :** Le troisième chapitre se concentre principalement sur le traitement des problèmes de commande prédictive pour des modèles de prédiction linéaires dont les signaux d'entrée sont affectés par un retard variable.

L'un des problèmes structurels causés par ce type de retard est le caractère variable en temps du modèle de prédiction. Dans la première partie du chapitre, des modèles linéaires affectés par une incertitude polytopique sont construits de manière à couvrir toute la gamme de variation des paramètres du modèle. Cette construction est en fait une particularisation du problème de *couverture* d'une courbe dans un espace de dimension finie par une forme convexe (ici par un polytope).

Après l'obtention d'un modèle de prédiction avec sa description de l'incertitude associée, les contraintes sont prises en compte pour la synthèse prédictive. La stabilité est garantie par la construction d'une série d'ensembles invariants robustes à l'aide des itérations sur les ensembles convexes et la résolution d'un problème d'optimisation de type "min-max" de sorte que la prédiction prend en compte l'évolution la plus pessimiste la dynamique.

Les problèmes d'optimisation multi-paramétriques de type "min-max" impliquent des solutions explicites très complexes, fait qui nous conduit à la proposition d'une méthode alternative de synthèse dans la dernière partie du chapitre. A partir d'une loi de commande synthétisée en utilisant un modèle de prédiction nominal, une procédure de contraction/expansion est utilisée pour la construction d'un ensemble positif invariant pour le système en boucle fermée.

Les résultats présentés dans ce chapitre se trouvent partiellement dans les publications suivantes :

S. OLARU, S. NICULESCU "Predictive Control for Linear Systems with Delayed Input Subject to Constraints", IFAC World Congress 2008, Seoul, Korea, 6-11 Juillet 2008.

S. OLARU, H. BENLAOUKLI, S. NICULESCU, "MPC for systems with variable time-delay. Robust positive invariant set approximations", ICINCO 2008, Madeira, May 2008.

H. BENLAOUKLI, S. OLARU, S. NICULESCU "Commande prédictive des systèmes dont l'entrée est affectée par un retard variable ", CIFA 2008, Bucarest, 3-5 Septembre 2008. Published also in "Automatique Avancée et Informatique Appliquée", P. Borne, F. Filip, M. Benrejeb si D. Popescu, editori, Ed. Academiei Romane, Bucuresti, 2009, ISBN 978-973-27-1806-3.

# Predictive control for systems affected by variable time delay

**Résumé** This chapter paper deals with the moving horizon control of systems subject to input delays and affected by input and state and/or output constraints.

The robustness of the control law with respect to the uncertainties introduced by the discretization is considered by constructing in a first instance the embedding of the nonlinear dependence on the delay. Then an extended linear model with polytopic uncertainty is used for prediction and the stability of the closed-loop system is guaranteed by forcing the state trajectories to attain a robust positively invariant terminal set on the prediction horizon.

Illustrative examples for the construction of the embeddings as well as for the control design complete the chapter .

## III-1 Introduction

It is well-known that the reaction of real systems and physical processes to exogenous signals takes never place "instantaneously", and one of the classical way to model such situations and phenomena is by using *time-delays*. Roughly speaking, the delays (constant or time-varying, distributed or not) describe coupling or between the dynamics, propagation and transport phenomena, heredity and competition in population dynamics. Various motivating examples and related discussions can be found in [239], [205], [237]. Networking (congestion mechanisms, consensus algorithms, teleoperation and networked control systems) is one of the classical examples among numerous applications including delays spanning biology, ecology, economy and engineering, where the *delay* is a *critical parameter* in understanding dynamics behavior and/or improving (overall) system's performances.

Independently of the mathematical problems related to the appropriate representation of such dynamics, the delay systems are known to rise challenging control problems due to the instabilities introduced in the closed loop by the presence of delays. Discrete time control of continuous systems affected by delays has to face even more difficulties due to the sampling which introduces an uncertainty in the discrete models.

It is known that predictors can be used to overcome the effects of dead-time (with inherent problems linked to the sensitivity of predictions for unstable models). MPC - "Model Predictive Control" solves at each sampling time a finite-time optimal control problem over a receding prediction horizon and is no surprise that its use in connection with delay systems was proposed from the early approaches [182]. At the time of the redaction of the present paper a

monograph is in print with a review of the attempts on this direction ranging from dead-time compensation to MPC [181].

Considering the latest advances in MPC design [235,203] which offer constraints handling capabilities with stability guarantees [232] as well as the possibility of incorporating uncertainties in an explicit manner at the design stage one has the picture of a versatile control strategy with a proved succes among practitioners.

To the best of the author knowledge, there exists several results in the literature devoted to delay systems and input and or state-constraints, see for instance [275], where appropriate (closed-loop) stability conditions have been proposed by using LMIs. Next, various robustness issues of some predictive-based control laws using the discrete dynamics and the uncertainty introduced by small variations of the times between sampling instants can be found in [228] (and the references therein). The approach we are proposing here is based on some "minmax" optimization problem that takes into account the "worst-case" performance of the polytopic uncertainty, and it opens interesting perspectives for defining an appropriate methodology, computationally tractable, for handling such class of problems. In other words, the aim of this paper is to develop methods and numerical algorithms for treating *simultaneously* delays and input and state and/or output constraints in a predictive control setting.

Concretely, the present paper emploies a predictive control technique for delay systems by considering the uncertainties introduced at the discretization stage. The obtention of the prediction model is detailed as well as the synthesis of a local state feedback stabilizer for the unconstrained case using convex optimization type of arguments. The invariant set associated to this stabilizing feedback law is constructed in order to impose stability constraints in the MPC synthesis. This can be achieved by adapting the theory of maximal output admissible sets for the system with polytopic uncertainty. Finally a receding horizon optimization problem is solved do drive the state to the origin by robustly satisfying the constraints. By obtaining the explicit formulation of the control law in terms of a piecewise affine control law, the shape of the feasibility domain being available.

### III-2 Problem description

Consider a nominal linear continuous-time system affected by input delay :

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t - h) \quad (87)$$

with  $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$  and  $h > 0$ , under appropriate initial conditions.

A corresponding discrete-time model will be constructed upon a chosen sampling period  $T_e$  by considering the time instants  $t_k = kT_e$ . In order to prove the robustness of any discrete-time control scheme with respect to original system, a certain degree of uncertainty being acceptable when dealing with delays :

$$h = dT_e - \epsilon \quad (88)$$

is considered.

In the general case, the variation  $\epsilon$  can be time-varying but it will be supposed in the following that the choice of  $d$  is such that it assures the boundness :

$$0 < \epsilon \leq \bar{\epsilon} \ll T_e \quad (89)$$

where  $\bar{\epsilon}$  is the maximal delay variation.

Noting the discrete time instants  $x_k = x(t_k)$  one can describe the discrete time model by :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_{k-d} - \Delta(u_{k-d} - u_{k-d+1}) \quad (90)$$

due to the fact that there is no exact correspondence between the delay in continuous-time and the samples available for the discrete model and this mismatch impose the consideration of an uncertainty.

The matrices  $A, B, \Delta$  are given by :

$$A = e^{A_c T_e} \quad (91)$$

$$B = \int_0^{T_e} e^{A_c(T_e - \theta)} B_c d\theta \quad (92)$$

$$\Delta = \int_{T_e - |\epsilon|}^{T_e} e^{A_c(T_e - \theta)} B_c d\theta \quad (93)$$

$$= \int_{-|\epsilon|}^0 e^{-A_c \tau} B_c d\tau \quad (94)$$

obtained by assuming that the control action  $u$  is maintained constant between sampling instants,  $u(t) = u_k, \forall t \in [t_k, t_{k+1})$ .

*Remark 3.* Equations (88-89) consider a delay uncertainty such that  $dT_e \geq h > dT_e - \bar{\epsilon}$ . In order to diminish the importance of the uncertainty matrix  $\Delta$  in (90), the uncertainty can be centered around a delayed input

$$|h - dT_e| \leq \bar{\epsilon} \ll T_e/2$$

thus decreasing the integration limits for (93). The distinction between the case  $\epsilon > 0$  and  $\epsilon < 0$  can be found in [228] as well as a detailed discussion about uncertainties introduced by small variations of the time between sampling instants. In the following we resume our study to the simpler case (89) and observe that the other cases can be treated similarly.

The extreme realizations of the discrete-time model are

**For  $\epsilon = 0$  :**

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_{k-d} \quad (95)$$

**For  $\epsilon = \bar{\epsilon}$  :**

$$x_{k+1} = Ax_k + (B - \bar{\Delta})u_{k-d} + \bar{\Delta}u_{k-d+1} \quad (96)$$

but all the intermediate realizations have to be considered.

The objective is to design a control law which regulates the system state for any  $0 \leq \epsilon \leq \bar{\epsilon} < T_e$  while robustly satisfying a set of constraints :

$$C_c x(t) + D_c u(t) \leq W_c, \quad \text{for } t \in [kT_e, (k+1)T_e) \quad (97)$$

which can be rewritten in a linear form function of  $x_k$  and  $u_k$  as :

$$C x_k + D u_k \leq W \quad (98)$$

Note that on the given interval  $u(t) = u_k$  but precautions have to be taken for  $x(t)$  which has the form :

$$x(t) = e^{A_c(t-kT_e)} x_k + \int_{kT_e}^t e^{A_c(t-\theta)} B u_k d\theta \quad (99)$$

thus depending on  $x_k$  and  $u_k$ .

This linear type of constraints covers a large class of limitations encountered in practice (input saturations or output constraints for exemple). It is supposed however that the origin is contained in the interior of the polyhedral domain described by (98).

### III-3 Prediction model

By rewriting the dynamics (95-96) in a compact form one can obtain the following linear model :

$$\xi_{k+1} = A_\Delta \xi_k + B_\Delta u_k \quad (100)$$

with

$$\xi_k^T = [x_k^T \ u_{k-d}^T \ \dots \ u_{k-1}^T \ u_k^T] \quad (101)$$

$$A_\Delta = \begin{bmatrix} A & B - \Delta & \Delta & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$B_\Delta = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ I_m]^T \quad (103)$$

It can be observed that the matrix  $\Delta$  is depending on the value of the delay uncertainty  $\epsilon$  which varies the integration limits in (93). Rigorously speaking, one should use  $\epsilon_k$  due to the fact that the uncertainty is time-varying (the same for  $\Delta$ ). In the following this explicit dependence on time is omitted for the simplicity of the notation.



*Remark 4.* For the compact linear model (100) one has  $A_\Delta \in \mathbb{R}^{(n+d \cdot m) \times (n+d \cdot m)}$  and  $B_\Delta \in \mathbb{R}^{(n+d \cdot m) \times m}$ . From (88) it follows that  $d \rightarrow \infty$  when  $T_e \rightarrow 0$  which means that the system (100) becomes infinite dimensional when the sampling time decrease to 0.

The idea followed in this paper is to confine  $\Delta$  in a polytopic set which covers all the possible realizations (thus independent of  $\epsilon$ ). In order to obtain the extreme combinations of this polytopic embedding, the Jordan canonical form can be used  $A_c = V\Lambda V^{-1}$ . The matrix  $\Lambda$  can be decomposed as  $\Lambda = \sum_{i=1}^n \Lambda_i$  with  $\Lambda_i$  originated by the terms of the direct sum  $\Lambda = \tilde{\Lambda}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{\Lambda}_n$ . For the brevity of the paper is assumed that  $A_c$  is invertible and not defective and  $\tilde{\Lambda}_i$  correspond to the diagonal elements. If this is not the case, the exponential of the Jordan blocks  $e^{\Lambda_i \epsilon}$  have to be computed separately and each resulting matrix further decomposed upon the upper diagonals in (106) to provide the full set of vertices for the polytopic model (108). Although not explicitly developed, one of the examples in section 6 will fall in this case, proving the generality of the results.

If the integral of the exponential (94) is written as :

$$\Delta = A_c^{-1}(e^{A_c \epsilon} - I_n)B_c \quad (104)$$

then for the limit values of  $\epsilon$  one can obtain the extreme realizations :

$$\Delta_0 = \mathbf{0}_{n \times m} \quad (105)$$

$$\Delta_i = A_c^{-1}V(e^{\Lambda_i \epsilon} - I)V^{-1}B_c, \forall i = 1, \dots, n \quad (106)$$

In order to obtain the desired control objectives for the system (100) one can use a polytopic embedding within the linear models given by :

$$A_{\Delta_0} = \begin{bmatrix} A & B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$A_{\Delta_i} = \begin{bmatrix} A & B - n\Delta_i & n\Delta_i & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, n \quad (108)$$

The following result resumes the existence of a polytopic model for the system (100).

**Theorem 2.** For any  $0 \leq \epsilon \leq \bar{\epsilon}$  the state matrix  $A_\Delta$  satisfies :

$$A_\Delta \in \text{Co}\{A_{\Delta_0}, A_{\Delta_1}, \dots, A_{\Delta_n}\} \quad (109)$$

where  $\text{Co}\{\cdot\}$  denotes the convex hull<sup>13</sup> and vertices  $A_i$  are given by (107-108).

*Proof :* For any  $0 \leq \epsilon \leq \bar{\epsilon}$  and for all  $i = 1, \dots, n$  there exists  $0 \leq \beta_i \leq 1$  such that :

$$\begin{aligned} \Delta &= V(e^{A\epsilon} - I)V^{-1}A_c^{-1}B_c = \\ &= \sum_{i=1}^n V(e^{A_i\epsilon} - I)V^{-1}A_c^{-1}B_c \\ &= \sum_{i=1}^n V(\beta_i(e^{A_i\bar{\epsilon}} - I) + (1 - \beta_i)(e^{A_i0} - I))V^{-1}A_c^{-1}B_c \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i + (1 - \beta_i) \Delta_0 \\ &= (n - \sum_{i=1}^n \beta_i) \Delta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i \Delta_i \\ &= \underbrace{\frac{(n - \sum_{i=1}^n \beta_i)}{n}}_{\alpha_0} n \Delta_0 + \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\beta_i}{n}}_{\alpha_i} n \Delta_i \end{aligned} \quad (110)$$

The matrix  $\Delta$  appears in a linear manner in the structure of  $A_\Delta$  as it can be seen in (102) and using the scalars  $\alpha_i \geq 0, i = 0, \dots, n$  found before, one can write :

$$A_\Delta = \sum_{i=0}^n \alpha_i A_i \quad (111)$$

By observing that  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$  the proof is completed ■

The model (100-103) with the uncertainty (109) will be used as prediction model in the MPC scheme. Before describing the optimization problem to be solved at each sampling time, the next section details the construction of a robust positively invariant set to be further used as terminal constraints for the prediction.

### III-3.1 Variable time delay larger than sampling time

Using an extended state space representation based on the equation (90), one can obtain using  $(A, B, \bar{A})$ , the nominal prediction model :

$$\xi_{k+1} = \bar{F}\xi_k + \bar{G}u_k \quad (112)$$

---

13. For some nonnegative scalars  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  summing to one

$$A_\Delta = \sum_{i=0}^n \alpha_i A_{\Delta_i}$$

**Nominal prediction model** By defining :

$$\xi_k^T = [x_k^T \ u_{k-h}^T \ u_{k-h-1}^T \ \dots \ u_{k-d}^T \ u_{k-d-1}^T \ \dots \ u_{k-1}^T] \quad (113)$$

the matrices  $A, B, \Delta$  and the scalars  $h$  and  $d$  one can form :

$$\xi_{k+1} = \bar{F}\xi_k + \bar{G}u_k \quad (114)$$

with  $\bar{F}, \bar{G}$  given by the equation (115-116).

$$\bar{F} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} & \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^{h-d} & B - \bar{\Delta} \bar{\Delta} & \overbrace{0 \ \dots \ \dots \ 0}^{d-2} \\ \hline & & & \\ \hline \left. \begin{array}{c} h-d \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} & \begin{array}{c} 0 \ I_m \ \ddots \\ \vdots \ \ddots \ \ddots \ 0 \\ \vdots \ \ddots \ I_m \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \ 0 \\ \vdots \\ 0 \ \ddots \\ I_m \ 0 \end{array} & \\ \hline & & \begin{array}{c} 0 \ I_m \\ \ddots \ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \ \ddots \ \ddots \ \ddots \\ I_m \ 0 \ \ddots \ \ddots \end{array} \\ \hline \left. \begin{array}{c} d-2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} & \dots & \dots & \begin{array}{c} 0 \ I_m \ \ddots \\ \ddots \ \ddots \ 0 \\ \ddots \ I_m \\ 0 \end{array} \end{array} \right] ; \quad (115)$$

$$\bar{G} = [0 \mid 0 \ \dots \ \dots \ \dots \mid 0 \ 0 \mid \dots \ \dots \ 0 \ I_m]^T \quad (116)$$

**Polytopic uncertainty model** The time-varying delay case is expressed by the equation (117) with the transition matrices given by (119-120).

$$\xi_{k+1} = F\xi_k + Gu_k \quad (117)$$

Considering the embedding of the matrix  $\Delta$  in a polytopic model with  $n+1$  extreme realizations, we realize that the global polytopic model in an extended state space will be :

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= F\xi_k + Gu_k \\ (F, G) &\in \Omega_\xi \\ \Omega_\xi &= Co\{(F_0, G_0), (F_1, G_1), \dots, (F_s, G_s)\} \end{aligned} \quad (118)$$

$$F = \begin{bmatrix} A \delta_h (B - \Delta) \delta_{h-1} (B - \Delta) + \delta_h \Delta \delta_{h-2} (B - \Delta) + \delta_{h-1} \Delta \dots \dots \delta_1 (B - \Delta) + \delta_2 \Delta \\ 0 & 0 & I_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & I_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & I_m \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad (119)$$

$$G = [\delta_1 \Delta \ 0 \ \dots \ \dots \ 0 \ I_m] \quad (120)$$

The variables  $\delta_i, i = 1, \dots, h$  are such that :

$$\sum_{i=1}^h \delta_i = 1; \quad \delta_i \in \{0, 1\} \quad (121)$$

The number of extreme realizations is  $s = h(n + 1)$  (due to the fact that there are  $h$  admissible logic variables combinations). Nevertheless  $n - 1$  of them, corresponding to  $\Delta = 0$  are in fact spanned by the neighbour combinations of logic variables such that the overall complexity of the polytopic model is given by  $s = nh + 1$ .

For the same state vector  $\xi_k$ , by using  $A, B$  and the polytopic embedding for  $\Delta$  with the extreme realizations  $\Delta_i, i = \{0, \dots, n\}$  one can describe in an extended state space, the polytopic model :

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= F\xi_k + Gu_k \\ (F, G) &\in \Omega_\xi \\ \Omega_\xi &= Co\{(F_1, G_1), (F_2, G_2), \dots, (F_s, G_s)\} \end{aligned} \quad (122)$$

with  $s = nh + 1$  (see the appendix for structural details).

The system evolution has to satisfy physical limitations in terms of the available control action and the accessible region in the states space. Their description will be given as a set of linear inequalities :

$$C\xi_k \leq W \quad (123)$$

### III-4 Robust positive invariant set

In the first stage a stabilizing control law is found for the polytopic model in the unconstrained case and secondly a positive invariant set is constructed by considering also the constraints (98).

### III-4.1 Stabilizing control law. Unconstrained case.

Consider the linear systems (100) subject to a polytopic uncertainty (109) :

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= A_{\Delta}\xi_k + B_{\Delta}u_k \\ A_{\Delta} &\in \Omega \\ \Omega &= \text{Co}\{A_{\Delta_0}, A_{\Delta_1}, \dots, A_{\Delta_n}\}\end{aligned}\quad (124)$$

It is supposed that a stabilizing control law

$$u_k = K\xi_k \quad (125)$$

exists and it can be obtained using an LMI (linear matrix inequalities) construction.

Consider an infinite-horizon min-max control problem :

$$\min_{u_k, u_{k+1}, u_{k+2} \dots} \max_{A_{\Delta} \in \Omega} J_{\infty} \quad (126)$$

with

$$J_{\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_{k+i}^T Q \xi_{k+i} + u_{k+i}^T R u_{k+i} \quad (127)$$

$$u_k = K\xi_k \quad (128)$$

where  $Q > 0$ ,  $R > 0$  are suitable weighting matrices.

A quadratic function of the state

$$V(\xi) = \xi^T P \xi, \quad P > 0 \quad (129)$$

will represent an upper bound for  $J_{\infty}$  if the following inequality is satisfied  $\forall A_{\Delta} \in \Omega$  :

$$V(\xi_{k+i+1}) - V(\xi_{k+i}) \leq -[\xi_{k+i}^T Q \xi_{k+i} + u_{k+i}^T R u_{k+i}] \quad (130)$$

Rewriting this equation using (128) the following inequality is obtained :

$$\begin{aligned}\xi_{k+i}^T [(A_{\Delta} + B_{\Delta}K)^T P (A_{\Delta} + B_{\Delta}K) \\ - P + K^T R K + Q] \xi_{k+i} \leq 0\end{aligned} \quad (131)$$

or equivalently :

$$(A_{\Delta} + B_{\Delta}K)^T P (A_{\Delta} + B_{\Delta}K) - P + K^T R K + Q \leq 0 \quad (132)$$

Using the ideas in [173], by noting  $P = \gamma S^{-1}$ ,  $S \geq I$  and  $Y = KS$ , the following LMI can be constructed :

$$\begin{bmatrix} S & SA_{\Delta}^T + Y^T B_{\Delta}^T & SQ^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_{\Delta}S + B_{\Delta}Y & S & 0 & 0 \\ Q^{1/2}S & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2}Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0, \quad (133)$$

Using now the fact that  $A_\Delta \in \Omega$ , a stabilizing control law is given by  $K = YS^{-1}$  where  $Y$ ,  $S$  and the scalar  $\gamma$  solutions of the LMI [219] :

$$\begin{aligned} & \min_{\gamma, S, Y} \gamma \\ & \begin{bmatrix} S & SA_{\Delta_i}^T + Y^T B_\Delta^T & SQ^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_{\Delta_i} S + B_\Delta Y & S & 0 & 0 \\ Q^{1/2} S & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \text{for all } i = 0, \dots, n \end{aligned} \quad (134)$$

*Remark 5.* This LMI based procedure is used in [219] to design a MPC law. The LMI in (134) is not depending on the measured state and thus the resulting control law is represented by a fixed feedback control gain. Its stabilizing properties will be used for the construction of a robust positive invariant set.

### III-4.2 Maximal output admissible set

In order to deal with the constraints, the first step is to rewrite (98) in terms of the augmented state variable  $\xi$  :

$$\Gamma \xi_k + Du_k \leq W \quad (135)$$

Using the stabilizing control law  $u_k = K\xi_k = YS^{-1}\xi_k$  found by solving (134) the following polyhedral domain can be defined in the augmented state space :

$$P = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{(n+d+m)} \mid (\Gamma + DK)\xi \leq W \right\} \quad (136)$$

**Definition 3.** [201] *The maximal output admissible set, for a LTI system  $\xi_{k+1} = \Phi\xi_k$  and a predefined set  $P$  as in (136), is described as :*

$$O_\infty = \{ \xi_0 \mid \Phi^k \xi_0 \in P, \forall k \in \mathbb{N} \} \quad (137)$$

In our case, the generalization of this concept for the polytopic systems is of most interest, the following definition providing the necessary details.

**Definition 4.** *For a system with polytopic uncertainty :*

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \Phi_i \xi_k \\ \Phi &\in \Omega_K \\ \Omega_K &= \text{Co}\{(A_{\Delta_0} + B_\Delta K); \dots; (A_{\Delta_n} + B_\Delta K)\} \end{aligned} \quad (138)$$

and a predefined set  $P$ , the maximal output admissible set  $O_\infty^\Omega$  is defined as the collection of all the initial states  $\xi_0$  for which the state trajectory remains in the interior of  $P$  for all future instants  $k \geq 0$ .

In other words the maximal output admissible set is described readily as :

$$O_\infty^\Omega = \{\xi_0 \mid \Phi^k \xi_0 \in P, \forall \Phi \in \Omega_K, \forall k \in \mathbb{N}\} \quad (139)$$

An important problem has to be clarified with respect to this construction : under which conditions the set  $O_\infty^\Omega$  is finitely determined. Taking into account that the control law  $u_k = K\xi_k$  was found such that all the extreme realizations in (138) are asymptotically stable, the extension of the Theorem 4.1 in [201] assures that for bounded  $P$ , with  $0 \in \text{Int}P$ , if the pairs  $(\Gamma + DK, A_i + B_i K)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  are observable, then  $O_\infty^\Omega$  is finitely determined.

Similar to the linear case, the construction algorithm can exploit the fact that  $O_\infty^\Omega$  is finitely determined if and only if  $O_N = O_{N+1}$  where :

$$O_N^\Omega = \{\xi_0 \mid \Phi^k \xi_0 \in P, \forall \Phi \in \Omega_K, \forall k \in \{1, \dots, N\}\} \quad (140)$$

Observing that the same set can be rewritten as :

$$O_{N+1}^\Omega = \{\xi \in O_N \mid \Phi \xi \in P, \forall \Phi \in \Omega_K\} \quad (141)$$

and further by noting  $\Phi_i = A_{\Delta_i} + B_{\Delta} K$ ,  $i = 0, \dots, n$  one can obtain a direct computable expression :

$$O_{N+1}^\Omega = \{\xi \in O_N \mid \Phi_i \xi \in P, \forall \Phi_i \in \{\Phi_0, \dots, \Phi_n\}\} \quad (142)$$

which can be used in a recursive manner to obtain the maximal output admissible set for the class of systems we are interested in.

The set  $O_\infty^\Omega$  enjoys by definition (139) robust positively invariance properties [171] and thus it will be further used in the predictive control design.

### III-5 Predictive control

A standard MPC strategy for the delay system considered here applies at each sampling instant the first component of the optimal control sequence  $\mathbf{k}_u = \{u_k, \dots, u_{k+N-d}\}$  as control action to the system while the tail is discarded. Using the new measurements the optimisation procedure is restarted, thus obtaining a closed-loop control scheme.

As a basic remark, the prediction horizon has to be larger than the delay in order to have an effective measure of its effect at the system output.

$$\mathbf{k}_u^* = \arg \min_{\mathbf{k}_u} \left\{ \max_i \xi_{k+N}^{\{i\}T} P \xi_{k+N}^{\{i\}} + \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \xi_{k+j}^{\{i\}T} Q \xi_{k+j}^{\{i\}} + u_{k+j}^T R u_{k+j} \right] \right\} \quad (143)$$

subject to :

$$\begin{cases} \xi_{k+j+1}^{\{i\}} = A_{\Delta_i} \xi_{k+j}^{\{i\}} + B_{\Delta} u_{k+j} \\ \Gamma \xi_{k+j}^{\{i\}} + D u_{k+j} \leq W, \\ \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, N-1 \\ \xi_{k+N}^{\{i\}} \in O_\infty^\Omega; \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

The construction of the predictive control law will be influenced by the choice of the prediction horizon  $N$ , and weighting factors  $Q, R$  which are respecting the choice made for the stabilizing control law in the previous section (127). In this case the terminal state will be weighted by  $P = S^{-1}$ .

*Remark 6.* The formulation (143) is based on a min-max optimization problem which takes into consideration worst-case performance for the polytopic uncertainty  $A_\Delta \in \text{Co}\{A_{\Delta_0}, A_{\Delta_1}, \dots, A_{\Delta_n}\}$ . Unfortunately this framework turns to be computationally expensive ([215],[244]), not to mention the version where the optimization is performed using closed-loop predictions which implies a nested min-max optimization to be solved upon dynamic programming principle.

The computational complexity is related only with the cost function, while the constraints are not affected by the way the worst-case is treated. Using this fact, a suboptimal feasible solution can be used for the MPC control scheme, drastically reducing the computational effort :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_u^* = \arg \min_{\mathbf{k}_u} & \xi_{k+N}^{\{0\}T} P \xi_{k+N}^{\{0\}} \\ & + \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \xi_{k+j}^{\{0\}T} Q \xi_{k+j}^{\{0\}} + u_{k+j}^T R u_{k+j} \right] \end{aligned} \quad (144)$$

subject to :

$$\begin{cases} \xi_{k+j+1}^{\{i\}} = A_{\Delta_i} \xi_{k+j}^{\{i\}} + B_{\Delta} u_{k+j} \\ \Gamma \xi_{k+j}^{\{i\}} + D u_{k+j} \leq W, \\ \quad \quad \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, N-1 \\ \xi_{k+N}^{\{i\}} \in O_\infty^\Omega; \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

It can be observed that the cost function in (144) is based on a nominal model while the constraints take into account all the possible uncertainty realization in order to obtain a robust control scheme. The robust stability is assured by the use of the terminal the terminal constraints and a pseudo-infinite horizon objective function [232].

*Remark 7.* The optimisation problem in (143) can be reformulated as a multi-parametric quadratic problem ([203],[188])

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_u^* = \arg \min_{\mathbf{k}_u} & 0.5 \mathbf{k}_u^T H \mathbf{k}_u + \mathbf{k}_u^T F \xi \\ \text{subject to : } & A_{in} \mathbf{k}_u \leq b_{in} + B_{in} \xi \end{aligned} \quad (145)$$

and further explicit solutions for the MPC law can be obtained by retaining the first component of  $\mathbf{k}_u^*(\xi)$ , thus expressing the predictive control in terms of a piecewise affine control law [188] :

$$u_k = K_i^{MPC} \xi + \kappa_i^{MPC}, \quad \text{with } i \text{ s.t. } x \in D_i, \quad (146)$$

and the regions  $D_i$  convex polyhedra in  $\mathbb{R}^{n+dm}$ .



### III-6 Examples

Two illustrative examples will be presented below. The first one corresponds to an unstable system with the matrix  $A$  invertible. The second one is the double integrator for which the state matrix is defective and not invertible. As mentioned in section 3, the arguments can be adapted easily in this situation.

#### III-6.1 Unstable system

Consider the unstable system with delay :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t-h), \quad h \in (0.2, 0.3) \quad (147)$$

Sampling at  $T_e = 0.1$  a discrete model is obtained with a delay  $d = 3$  and the uncertainty  $0 < \epsilon \leq 0.1$  which affect the structure of the prediction model (90). Following the procedure described in section 2, a polytopic model can be constructed with three extreme realisations  $\{A_{\Delta_0}, A_{\Delta_1}, A_{\Delta_2}\}$ .

$$A_{\Delta_0} = \begin{bmatrix} 1.1158 & -0.0106 & 1.0579 & 0 & 0 \\ 0.1058 & 0.9995 & 0.0529 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (148)$$

$$A_{\Delta_1} = \begin{bmatrix} 1.1158 & -0.0106 & 1.0579 & 0.1169 & 0 \\ 0.1058 & 0.9995 & 0.0529 & 0.1169 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (149)$$

$$A_{\Delta_2} = \begin{bmatrix} 1.1158 & -0.0106 & 1.0691 & -0.0112 & 0 \\ 0.1058 & 0.9995 & 0.1646 & -0.1117 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (150)$$

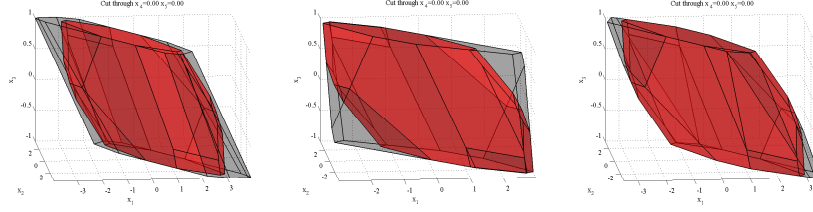
Using the stabilizing feedback control law

$$u_k = [-1.6952 \ -1.5002 \ -1.4597 \ -1.2375 \ -0.8513] \xi_k \quad (151)$$

obtained by solving the corresponding LMI (134), one can obtain a robust positive invariant set (figure 48).

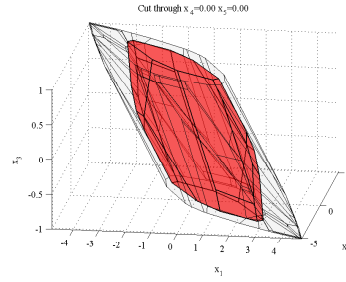
The region of the state space where the MPC control law will accomplish the regulation objective is directly related with the length of the prediction horizon (figure 49 presents the case  $N = 3$ ). The MPC synthesis was based on  $Q = I$ ,  $R = 1$  and the set of constraints :

$$\begin{aligned} -1 &\leq u_k \leq 1 \\ \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \end{bmatrix} &\leq x_k \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (152)$$



**Figure 48.** The robust maximal output admissible set  $O_{\infty}^{\Omega}$  (red) compared from left to right with the maximal output admissible sets of each extreme realization  $A_{\Delta_0}, A_{\Delta_1}, A_{\Delta_2}$

It can be observed from the shape of the feasible domain that main restriction come from the input constraints activation (not a surprise for a open loop unstable system).



**Figure 49.** Feasible domain for the MPC law (wireframe) vs. the the robust maximal output admissible set (solid color).

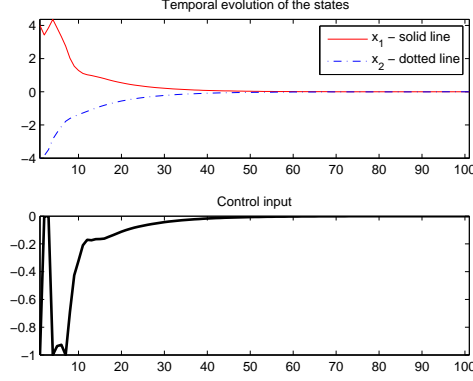
The time-domain simulation starting from an initial state  $\xi^T = [[4 - 4 - 100]]$  (figure 50) proves the effectiveness of the control scheme with constraints satisfaction.

### III-6.2 Double integrator with time-delay

Consider the double integrator with delay :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t-h), \quad h \in (0.2, 0.3) \quad (153)$$

A discrete time model has to be constructed for  $T_e = 0.1$ , the delay being represented by  $d = 3$  samples with an uncertainty  $0 < \epsilon \leq 0.1$ . The model uncertainty has to be expressed in terms of a polytopic model (124). The approach (104) cannot be employed but a simple Taylor decomposition leads to



**Figure 50.** Time-evolution of the states and inputs.

the following extreme realizations :

$$A_{\Delta_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{\Delta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (154)$$

$$A_{\Delta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0.045 & 0.005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (155)$$

Solving the LMI (134) with  $Q = 50I$  and  $R = 0.1$  the stabilizing following control law is obtained :

$$u_k = [-0.0341 \ -0.0333 \ -0.0073 \ -0.0030 \ -0.0815] \xi_k \quad (156)$$

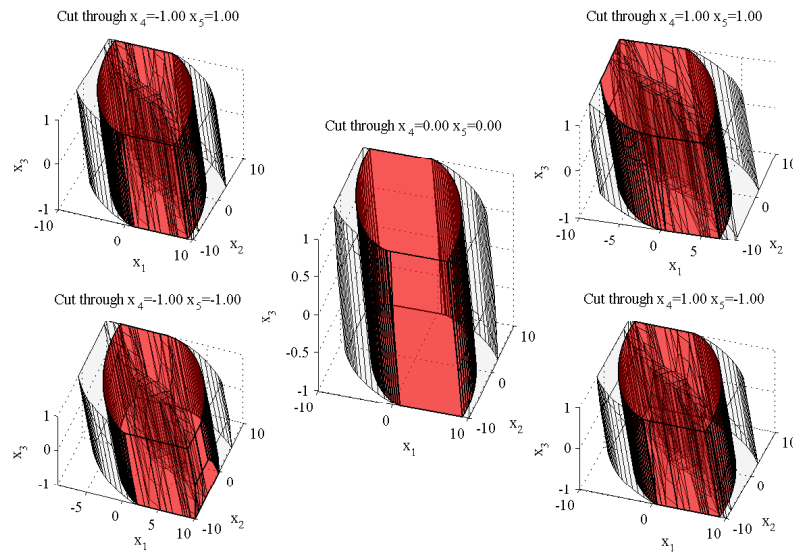
Figure 51 presents the robust positive invariant set and the feasible domain for the MPC law synthesized according to (144) with a prediction horizon  $N = 7$  and the constraints :

$$\begin{aligned} -1 &\leq u_k \leq 1 \\ \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \end{bmatrix} &\leq x_k \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (157)$$

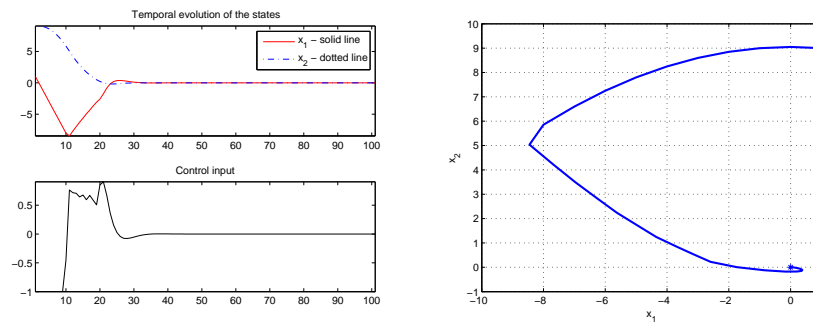
The feasible domain is represented in fact by the union of 76 regions in the state space for which a fixed affine control law is associated (146). The state space dimension being 5, the figures are presenting cuttings for the last two dimension by  $(0, 0); (-1, -1); (-1, 1); (1, -1); (1, 1)$ . It can be observed that in  $(0, 0)$  there is inside a single region while the other cuttings are splitting the feasible

regions in several regions due to the fact that the constraints activation change the optimality conditions for the optimization problem which is solved at each sampling instant.

Finally in figure 52 the simulation in time is presented with the state evolution and the corresponding control action as well as the state space trajectory.



**Figure 51.** Feasible domain for the MPC law (wireframe) and the the robust maximal output admissible set (solid color).



**Figure 52.** Time-evolution of the states and inputs (left). Trajectory on the state space of the original system (right).

### III-7 Tuning MPC for robustness

The resulting law  $u_k = Kx_k = Ys^{-1}x_k$  represents an robust stabilizing control in the unconstrained case. The idea in the following is to use this information when tuning the nominal MPC parameters in (143), namely  $Q, R$  and  $P$ . We start with the remark that the MPC law is a piecewise affine function of the state and the central region (or the region containing the origin, if the constraints are not symmetric) is characterized by the unconstrained optimum for the chosen performance index in (143). Constructing this performance index such that the optimal solution corresponds to the LQ solution ( $K = YS^{-1} \leftrightarrow K_{LQ}$ ) can be seen as an inverse optimality problem [213].

In short the tuning procedure is the following : given the matrices  $\bar{F}, \bar{G}$  and  $Y, S$  from (134), the matrices  $\bar{Q} \geq 0$  and  $\bar{R} > 0$  (and indirectly  $\bar{P} \geq 0$ ) will be constructed such that the optimal solution to the unconstrained problem (143) to be :

$$\mathbf{k}_u^* = \begin{bmatrix} YS^{-1} \\ YS^{-1}(\bar{F} + \bar{G}YS^{-1}) \\ \vdots \\ YS^{-1}(\bar{F} + \bar{G}YS^{-1})^{N-1} \end{bmatrix} \xi_k \quad (158)$$

The (not unique) pair  $(\bar{Q}, \bar{R})$  has to satisfy :

$$\bar{Q} = \bar{P} - \bar{F}^T \bar{P} \bar{F} + \{YS^{-1}\}^T (\bar{R} + \bar{G}^T \bar{P} \bar{G}) YS^{-1} \quad (159)$$

$$\bar{R} YS^{-1} + \bar{G}^T \bar{P} \bar{G} YS^{-1} + \bar{G}^T \bar{P} \bar{F} = 0 \quad (160)$$

This problem can be solved in the general case by employing an LMI formulation [222] :

$$\begin{aligned} & \min \alpha \\ & \bar{P} - \bar{F}^T \bar{P} \bar{F} + \{YS^{-1}\}^T (\bar{R} + \bar{G}^T \bar{P} \bar{G}) YS^{-1} \succ 0 \\ & \begin{bmatrix} Z & \bar{R} YS^{-1} + B^T \bar{P} B YS^{-1} + B^T \bar{P} A \\ * & I \end{bmatrix} \succ 0 \\ & Z \prec \alpha I, \quad \bar{P} \succ 0 \end{aligned} \quad (161)$$

**Theorem 3.** *The nominal MPC control law, designed upon a performance index obtained by inverse optimality with respect to an unconstrained robust linear feedback, is robustly stabilizing the system (122) despite of constraints on a non-degenerate neighborhood of the origin  $V$ .*

**Proof :** The proof is constructive and follows the arguments described in this section. Using the LMI formulation (134), a robustly stabilizing control law is obtained for the unconstrained system (122) affected by uncertainty. The corresponding gain  $\bar{K} = YS^{-1}$  will be used together with the nominal model for the resolution of the LMI problem (161) which provides by inverse optimality the matrix  $\bar{R}$ . The matrix  $\bar{Q}$  is obtained with a simple evaluation of (159) and the structure of the performance index in (143) is completed. The prediction horizon

of the same performance index can be chosen according with the desired performances and complexity of the explicit solution. Independently of this choice, if the matrix  $\bar{P}$  satisfies (161), then the nominal MPC leads to a piecewise affine control law and for the region  $D_{i_0}$  with  $0 \in \text{Int}(D_{i_0})$  the explicit control law will be

$$u_k = K_{i_0}^{MPC} \xi_k + \kappa_{i_0}^{MPC} = Y S^{-1} \xi_k \quad (162)$$

This region is polyhedral and the robust stabilizing properties are verified for an invariant subset with respect to the closed loop dynamics (122). If we consider the general form of the invariant set given by the level set :

$$E(\sigma) = \{\xi | \xi^T \bar{P} \xi \leq \sigma\} \quad (163)$$

then one can find  $\sigma > 0$  satisfying  $V = E(\sigma) \subset D_{i_0}$ . ■

### III-8 Robust positive invariant set

#### III-8.1 Maximal RPI

The synthesis problem being solved, we dispose of a control law supposed to stabilize a time-varying delay system. The question is : *which is the maximal invariant set for the closed loop system ?* An approximation can be obtained by constructing the maximal robust positive invariant set (MRPI) for a piecewise affine system (PWA) affected by uncertainty.

A PWA system is obtained from the embedding of the time-varying system in a linear model affected by polytopic uncertainty in closed loop with the piecewise affine control law :

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= f_{PWA}(\xi_k) = (F + G K_i^{MPC}) \xi_k + \kappa_i^{MPC} \\ &\quad \text{for } \xi_k \in D_i \\ (F, G) &\in \Omega_\xi \\ \Omega_\xi &= \text{Co}\{(F_1, G_1), (F_2, G_2), \dots, (F_s, G_s)\} \end{aligned} \quad (164)$$

where  $D_i$  are the polytopic partition  $D = \cup_i D_i$ .

The dynamics related to an extreme realization of the PWA polytopic uncertainty will be described by :

$$\xi_{k+1} = f_{PWA_i}^j(\xi_k) = (F_j + G_j K_i^{MPC}) \xi_k + \kappa_i^{MPC} \quad \text{for } \xi_k \in D_i, j \in \{0, 1, \dots, s\} \quad (165)$$

The description of the MRPI set for such a PWA system is not immediate, even for simple case the finite determinism can not be guaranteed. Nevertheless, the fact that the partition of the state space is given by polyhedral regions will be used in the following section to build appropriate approximations.

In order to describe these geometrical constructions, the image and preimage operators over the sets  $\Psi \in \mathbb{R}^{n+hm}$  will be defined as :

$$\begin{aligned} \text{Im}_{f_{PWA}}(\Psi) &= \bigcup \{\zeta \in \mathbb{R}^{n+hm} | \exists \xi \in \Psi, \text{ s.t.} \\ \zeta &= (F_j + G_j K_i^{MPC}) \xi + \kappa_i^{MPC} \quad \text{for } \xi \in D_i \cap \Psi\} \end{aligned} \quad (166)$$

$$\begin{aligned}
PreIm_{f_{PWA}}(\Psi) &= \bigcap_j \{ \xi \in D \mid \exists \zeta \in \Psi, \text{ s.t.} \\
&\quad \zeta = (F_j + G_j K_i^{MPC}) \xi + \kappa_i^{MPC} \text{ for } \xi \in D_i \}
\end{aligned} \tag{167}$$

### III-8.2 Contractive procedure

The idea is to subtract from the state partition  $D = \cup_i D_i$  defining the PWA system, those regions for which one of the extreme dynamics will evolve outside  $D$ . This is an iterative procedure as long as after each iteration, the set  $D$  is modified and thus the possible evolutions are to be rechecked.

The complexity of the procedure is given by the fact that the subtraction of convex set is not a closed operation. In short, if  $D$  is convex, there is no guarantee that it will remain convex after an iteration of the contractive procedure. Indirectly this is acknowledging the fact that the MRPI set may not be convex.

**Procedure 1 :** Contractive Scheme

```

 $V_0 = D$ 
 $k = 0$ 
while (precision condition)
     $V_{k+1} = PreIm_{f_{PWA}}(Im_{f_{PWA}}(V_k) \cap V_k)$ 
     $k = k + 1$ 

```

### III-8.3 Expansive procedure

In this case instead of excluding gradually those regions outside the MRPI set, we start with an RPI set and add those regions which evolve in one step inside the RPI set. Again the resulting set is RPI and is monotonically increasing (in the sense of inclusion) and is limited by MRPI.

An important advantage of the expansive procedure is that the intermediate results are robust positive invariant and thus can be considered as candidate approximations for the MRPI set.

**Procedure 2 :** Expansive Scheme

```

find  $\sigma > 0$  s.t.  $E(\sigma) \subset D_{i_0}$ 
 $V_0 = E(\sigma)$ 
 $k = 0$ 
while (precision condition)
     $V_{k+1} = PreIm_{f_{PWA}}(Im_{f_{PWA}}(D) \cap V_k)$ 
     $k = k + 1$ 

```

### III-8.4 Inner approximation

Note the maximal robust positive invariant set  $\Psi$  and the iterates obtained with the expansive and contractive procedure by  $\Psi_i^e$  and  $\Psi_i^c$  respectively.

Neither the expansive procedure  $\Psi_i^e \subset \Psi$ , nor the contractive procedure  $\Psi_i^c \supset \Psi$  do not dispose of a measure of the convergence toward the MRPI set. However, by mixing the two relations we obtain an inner approximation for the MRPI set :

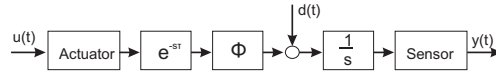
$$\Psi_i^e \subset \Psi \subset \Psi_i^c \tag{168}$$

Considering the Hausdorff metric over the class of polyhedra. The distance  $d_H(\Psi_i^c, \Psi_i^e)$  can provide a measure of the MRPI approximation offered by  $\Psi_i^e$  and thus a *precision condition* :

$$\Psi_i^e \subset \Psi \subset \Psi_i^c \subset \Psi_i^e \oplus \mathbf{B}_0(d_H(\Psi_i^c, \Psi_i^e)) \quad (169)$$

### III-9 Example

Consider a plant as the one reported in [196]. The objective is the level control and the bloc representation is presented in figure 58. Beside the sensor



**Figure 53.** General scheme for the plant to be controlled.

and the actuator transfer functions we retrieve in this schema-block the variable time-delay ; a nonlinear function  $\Phi$  known and invertible and an integrator. The paper [196] presented a method for the disturbance suppression, such that in the following we will consider the level control and replace the classical PI controller with a predictive controller and characterize the safety functioning region by the construction of the robust positive invariant region following the procedure presented in the previous sections.

The continuous time system to be controlled is a double integrator with variable-time delay :

$$\dot{x}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{t-\tau}, \quad \tau \in [0s, 0.3s] \quad (170)$$

The discrete-time model is given by :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix} u_{k-i} - \Delta(u_{k-v} - u_{k-v+1}), \quad \text{with } v \in \{0, 1, 2\} \quad (171)$$

In the first instance the embedding of the uncertainty matrix  $\Delta$  have to be obtained. Due to the fact that in the original representation, we deal with a 2-dimensional state vector  $x_k$ , the poytopic uncertainty will be :

$$\Delta \in Co \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0.013 \end{bmatrix} \right\} \quad (172)$$

In the extended state representation, the nominal model obtained for  $\bar{\tau} = 0.3$  is :

$$\xi_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \quad (173)$$



A robustly stabilizing feedback gain is obtained for the unconstrained case by solving the LMI problem (134) :

$$K = [-1.3188 \ -0.5408 \ -0.1292 \ -0.0157 \ -0.1511] \quad (174)$$

The inverse optimality problem leads after solving (161) to the tuning of the nominal MPC law with the weighting matrices  $R = 1$

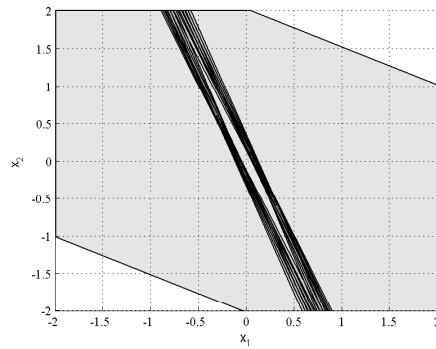
$$Q = \begin{bmatrix} 1.5204 & 0.6985 & -0.0210 & 0.0247 & 0.1837 \\ 0.6985 & 0.5769 & 0.1856 & 0.1393 & 0.1024 \\ -0.0210 & 0.1856 & 0.4259 & 0.0022 & -0.1953 \\ 0.0247 & 0.1393 & 0.0022 & 0.1293 & 0.0488 \\ 0.1837 & 0.1024 & -0.1953 & 0.0488 & 0.2139 \end{bmatrix} \quad (175)$$

$$P = \begin{bmatrix} 27.2258 & 9.1962 & 2.5071 & 2.5913 & 2.4945 \\ 9.1962 & 7.0818 & 1.0028 & 1.1254 & 1.0667 \\ 2.5071 & 1.0028 & 0.6747 & 0.2539 & 0.0309 \\ 2.5913 & 1.1254 & 0.2539 & 0.8035 & 0.2981 \\ 2.4945 & 1.0667 & 0.0309 & 0.2981 & 0.9723 \end{bmatrix} \quad (176)$$

By imposing a set of constraints on the input and the state :

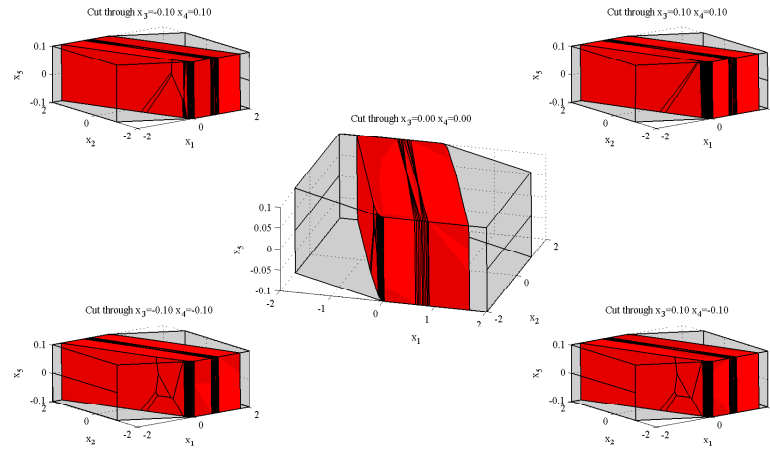
$$\begin{aligned} -0.1 &\leq u_k \leq 0.1 \\ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} &\leq x_k \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (177)$$

and taking into account that the maximal delay is 3 sampling instants we choose a prediction horizon  $N = 5$  in order to maintain a low complexity of the explicit solution (47 regions in the state space partition, see figure 54). Nevertheless it must be mentioned that in general the longer the prediction horizon, the larger the domain of feasibility.



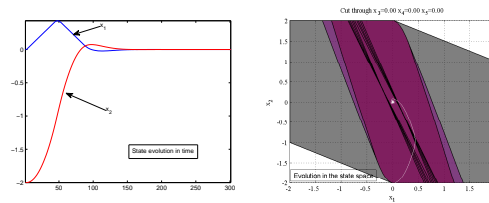
**Figure 54.** Projection of the explicit solution's partition on the first two components of the extended state space.

The polytopic model in the extended state representation which embeds (using 7 extreme realizations) the time-varying delay system will allow the employment of the contractive procedure for the approximation of the maximal invariant set. In figure (55) cuttings through the approximation obtained after 5 iterations is presented.

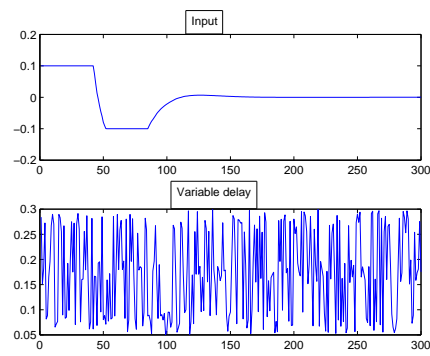


**Figure 55.** The explicit solution's partition and the approximation of the MRPI set.

Finally in figure (56-57) a time domain simulation with varying delay is presented (starting from the state  $(0; -2)$ ), proving the versatility of the proposed control technique.



**Figure 56.** The time evolution of the state components.



**Figure 57.** The control signal and the variation of the delay in time.

## ***Partie IV : La commande prédictive des systèmes multi-capteur. Éléments de tolérance aux pannes basés sur la théorie des ensembles invariants.***

### **Résumé :**

L'utilisation d'un réseau de capteurs qui fournissent des informations redondantes sur les sorties mesurables d'un système de commande devient possible par la miniaturisation et la faiblesse des coûts de production. Par exemple, des réseaux de capteurs sans fil existent déjà et sont utilisés par les systèmes automatiques de contrôle dans les bâtiments intelligents, dans l'automatisation du processus d'extraction minière ou dans les boucles de réglage des voitures modernes. Ces structures de commande multi-capteurs soulèvent des problèmes intéressants en automatique, l'un des besoins essentiels dans leur exploitation étant la *tolérance aux défauts*.

Comme une alternative aux techniques de fusion d'informations provenant de capteurs, une nouvelle approche a été proposée récemment [271], en se basant sur les descriptions déterministes du comportement d'un capteur, afin d'obtenir la tolérance aux défauts par la séparation des ensembles invariants correspondant aux différentes dynamiques de l'estimateur associé. En supposant que la perturbation et le bruit affectant le système sont bornés, nous obtenons des conditions suffisantes de stabilité pour le système en boucle fermée avec la garantie de tolérance aux pannes.

En se basant sur ces principes, dans ce chapitre seront rappelés les concepts liés à l'invariance positive et à la construction de  $\epsilon$ -approximations pour l'ensemble minimal positif invariant, par rapport à une dynamique linéaire. Une procédure spécifique est proposée pour la commutation entre les différents ensembles de perturbations. Sera traité également le cas d'inclusion d'une région prédéfinie de l'espace d'état dans l'ensemble invariant. Les résultats sont en outre utilisés pour des systèmes de commande multi-capteurs qui ont à faire face à des commutations entre différentes estimations et surtout doivent traiter l'apparition des défauts. La construction d'ensembles invariants pour les différents modes de fonctionnement dans ce contexte conduit à l'obtention d'informations pertinentes pour la détection des défauts. La stabilité des systèmes en commutation est garantie si la topologie des ensembles invariants permet la sélection exclusive des estimations provenant de capteurs fonctionnant en régime nominal.

Dans la dernière partie du chapitre, la technique est étendue au cas *non linéaire* et le schéma de commutation est amélioré en adaptant une méthode qui utilise la commande prédictive. L'optimisation à *horizon glissant* est reconfigurée pour isoler les capteurs avec un fonctionnement défectueux. L'algorithme de commande ne sélectionne que les prédictions à partir de sources *sûres* afin d'obtenir le meilleur rendement par rapport à une fonction de coût prédéfinie.

Les résultats présentés dans ce chapitre se trouvent dans les publications suivantes :

S. OLARU, J.A. DEDONA, M. SERON "Positive Invariant Sets for Fault Tolerant Multisensor Control Schemes", IFAC World Congress 2008, Seoul, Korea, 6-11 Juillet 2008.

S. OLARU, M. M. SERON, J. A. DE DONÁ AND F. STOICAN "Receding horizon optimisation for control and reconfiguration of multisensor schemes", NMPC Workshop, Pavia, Italy 5-9 September 2008.

## Predictive control for multisensor systems

**Résumé** The use of redundant sensors is an affordable option in nowadays applications. For example, wireless sensor networks are common practice in network control systems of intelligent buildings, automotive control and mining automation. These multisensor schemes bring interesting challenges for the control research community, one of the acute demands being *fault tolerance* capabilities.

As an alternative to the more mature sensor fusion techniques, a new approach was proposed recently [271], which uses a deterministic description of the sensor behaviour in order to obtain fault tolerance guarantees upon invariant set separation. The approach utilises bounded disturbance and noise descriptions, and derives a switching control which ensures closed-loop fault tolerant stabilisation.

The present chapter revisits the construction of  $\epsilon$ -approximations of minimal robust positive invariant sets for linear systems. Contractive procedures are proposed and the cases of switching between different sets of disturbances and the inclusion of a predefined region of the state space are treated in detail. The results are used in multisensor control schemes which have to deal with specific problems originated by the switching between different estimators and by the presence of faults in some of the sensors. The construction of positive invariant sets for different operating regimes provides, in this context, effective fault detection information. Within the same framework, global stability of the switching strategies can be assured if the invariant sets topology allows the exclusive selection of estimates obtained from healthy sensors.

In the last part of the chapter, the technique is extended to *nonlinear* systems and the switching scheme is enhanced by the use of a prediction based method for delivering the appropriate control action. The *receding horizon* optimisation procedure is reconfigured to discard faulty sensors and to only select between healthy estimation sources in order to achieve the best performance with respect to a given cost function.

### IV-1 Introduction

Multisensor schemes have originated substantial research on the aggregation of the information available from the plant in order to improve reliability and robustness. Sensor fusion has been one of the techniques traditionally employed in multisensor schemes where the construction of improved estimators is the main concern [185], [229], [274]. As it is usually the case with the diversification and miniaturisation with low cost solutions, components are predisposed to failures. For multisensor schemes, the presence of faults is manifested by the alteration of the estimations of the features of interest. The control strategy has to be equipped with fault detection capabilities in order to avoid the construction of the control action based upon erroneous feedback information.

Recently, multisensor switching feedback control strategies have provided interesting solutions with fault tolerance guarantees [271]. The design procedure uses a switching strategy motivated by receding horizon optimal control principles. At each sampling time, the switching strategy implements the control action by selecting the sensor-estimator pair that provides the best predicted closed-loop performance according to a predefined criterion.

The present paper revisits the conditions for closed-loop stability for such multisensor switching control schemes and reduces the conservatism of the assumptions by refining the invariant sets for healthy and for faulty functioning. Indeed, positive invariance is a common analysis and control design tool for systems affected by constraints and/or disturbances. The switching between sensor-estimator pairs introduced by these schemes implies switching between systems affected by different sets of disturbances. In addition, the presence of failures implies structural modifications which have to consider the functioning regime previous to the fault. It will be shown how these issues can be embedded in the invariant sets definition and constructive solutions will be provided.

Ideally, the use of minimal robust positive invariant (mRPI) sets would provide the exact information about the closed-loop behavior under different operating conditions needed to perform (explicitly or implicitly) fault detection. From a practical point of view, exact mRPI sets can be obtained only for restricted classes of systems and, in general,  $\epsilon$ -approximations have to be employed instead. Existing results on  $\epsilon$ -approximations of robust positive invariant sets in [259] are extended in the present paper along the following lines :

- The set confining the disturbance does not have to contain the origin ;
- The iterative procedure constructs the approximations in a contractive manner ;
- The result is extended to the construction of invariant sets containing a given region of the state space.

## IV-2 Multisensor control scheme

### IV-2.1 System structure with multiple sensors and estimators

The multisensor control scheme assumes the existence of a linear discrete-time state space model  $\Sigma$ , for the plant considered. The state vector of the system  $x \in \mathbb{R}^n$  is not directly available. Instead, combinations of the states, given by  $C_\Sigma x$ , can be measured via  $N$  sensors. The output signal of each sensor  $y_i$  carries useful information for control purposes and its treatment has to take into account the internal dynamics of each sensor, described by the evolution of the internal state  $\xi_i \in \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, \dots, N$ . The first column of Table 3 contains the linear models for the plant and the sensors, as well as the dynamics of the estimators. A block description of the control scheme is depicted in Figure 58.

It is assumed that the sensor matrices  $A_{s_i}$  have all their eigenvalues strictly inside the unit circle and that the estimators are designed in order to exhibit a good dynamic behavior for the extended state estimate  $\begin{bmatrix} \hat{x}_i & \hat{\xi}_i \end{bmatrix}^T$ . This is achieved

	Dynamics	Reference Model	Tracking Error
Plant $\Sigma$	$x^+ = A_\Sigma x + B_\Sigma u + E_\Sigma w$	$x_{ref}^+ = A_\Sigma x_{ref} + B_\Sigma u_{ref}$	$z^+ = x^+ - x_{ref}^+$ $= A_\Sigma z + B_\Sigma (\underbrace{u - u_{ref}}_v) + E_\Sigma w$
Sensors $S_i (i = 1, \dots, N)$	$\xi_i^+ = A_{s_i} \xi_i + B_{s_i} C_\Sigma x,$ $y_i = C_{s_i} \xi_i + \eta_i$	$\xi_{i,ref}^+ = A_{s_i} \xi_{i,ref} + B_{s_i} C_\Sigma x_{ref}$	$\zeta_i^+ = \xi_i^+ - \xi_{i,ref}^+$ $= A_{s_i} \zeta_i + B_{s_i} C_\Sigma z$
Estimators $F_i (i = 1, \dots, N)$	$\begin{bmatrix} \hat{x}_i^+ \\ \hat{\xi}_i^+ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_\Sigma & -L_i C_{s_i} \\ B_{s_i} C_\Sigma & A_{s_i} - L_{s_i} C_{s_i} \end{bmatrix}}_{A_{L_i}} \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{\xi}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\Sigma \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} L_i \\ L_{s_i} \end{bmatrix} y_i$	$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i,ref} \\ \hat{\xi}_{i,ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ref} \\ \xi_{i,ref} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \hat{z}_i \\ \hat{\zeta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{\xi}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_{i,ref} \\ \hat{\xi}_{i,ref} \end{bmatrix}$

**Table 3.** Plant, sensor and estimator models. The tracking error in each case is given with respect to the state of the corresponding reference model. ( $^+$  denotes the successor state)

by adequate choice of matrices  $L_i, L_{s_i}$  such that the resulting matrices  $A_{L_i}, i = 1, \dots, N$  have all their eigenvalues strictly inside the unit circle.

#### IV-2.2 Control objective and exogenous signals

The control objective is to ensure that the state of the system tracks a reference signal  $x_{ref}$  which, in turn, follows the dynamics given in Table 3 for the reference model. The reference tracking of the global system requires a reference signal for each sensor state. The tracking errors are given by the difference between the state and the respective reference signal, as can be seen in the last column of Table 3.

In order to derive a control strategy, a description of the exogenous signals  $u_{ref}, w, \eta_i$ , is needed. The present study is dedicated to the case of bounded signals, with no other assumption on their properties. The disturbance and measurement noises are assumed to be contained in polyhedral sets  $w \in W$  and  $\eta_i \in N_i$ . In addition, bounds on the input reference signal  $u_{ref}$  induce bounds on the state of the reference model<sup>14</sup> :

$$x_{ref} \in X_{ref} \quad (178)$$

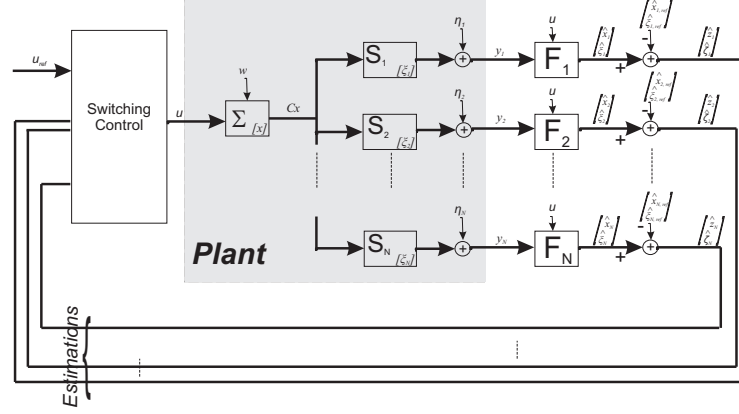
with  $X_{ref}$  a closed (polyhedral) set.

#### IV-2.3 Sensor failure model

The faults considered in this paper are of the type of total sensor outage. Namely, it is assumed that during sensor failure the output of the sensor ceases to carry information about the sensor state (even though the sensor state continues

14. If the matrix  $A_\Sigma$  has eigenvalues on or outside the unit circle then it is assumed that  $u_{ref}$  is obtained via a stabilizing feedback law for the pair  $(A_\Sigma, B_\Sigma)$ , assumed controllable.





**Figure 58.** Configuration of the multisensor scheme with the plant  $\Sigma$ , sensors  $S_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), estimators  $F_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) and the switching control block (fault tolerant selection of the sensor-estimator pairs).

to evolve with the same dynamics). The failure is thus equivalent to the following switching on the observation equation :

$$y_i = C_{s_i} \xi_i + \eta_i \xrightarrow{FAULT} y_i = 0 \cdot \xi_i + \eta_i^F \quad (179)$$

$$y_i = C_{s_i} \xi_i + \eta_i \xleftarrow{RECOVERY} y_i = \eta_i^F \quad (180)$$

The noise level during the fault,  $\eta_i^F$ , may in general be different from the noise during healthy operation,  $\eta_i$ . The bounds on the noise during the fault are denoted  $\eta_i^F \in N_i^F$ .

#### IV-2.4 The missing link

The presence of faults implies, through the structural changes (179), a change in the input of the dynamic equation of the corresponding estimator. Indeed, a fault-recovery cycle will bring the system back to the operational framework (Table 1) but the reinitialisation of the estimator's state has to be carefully considered. The evolution of the estimation error, under healthy sensor operation, will verify :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_i^+ \\ \tilde{\xi}_i^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^+ \\ \xi_i^+ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_i^+ \\ \hat{\xi}_i^+ \end{bmatrix} = A_{L_i} \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{\xi}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_\Sigma \\ 0 \end{bmatrix} w - \begin{bmatrix} L_i \\ L_{s_i} \end{bmatrix} \eta_i \quad (181)$$

We assume that the pairs  $\left( \begin{bmatrix} A_\Sigma & 0 \\ B_{s_i} C_\Sigma & A_{s_i} \end{bmatrix}, [0 \ C_{s_i}] \right)$  are detectable for  $i = 1, \dots, N$ , and that the gains  $L_i, L_{s_i}$  are such that matrices  $A_{L_i}$  have all their eigenvalues strictly inside the unit circle (this is always possible by the detectability assumption).

The estimation error might be seen as the “missing link” (due to the fact that it is not directly measurable) between the estimator tracking error and the tracking error :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{z}_i \\ \hat{\zeta}_i \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Estimator} \\ \text{tracking error}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} z \\ \zeta_i \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Tracking} \\ \text{error}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{\xi}_i \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Estimation} \\ \text{error}}} \quad (182)$$

### IV-3 Invariant sets construction

#### IV-3.1 A contractive procedure

Consider a general discrete-time linear time-invariant systems subject to disturbance :

$$x^+ = Ax + B\delta \quad (183)$$

with  $A$  strictly stable and  $\delta \in \Delta$  a polytopic set. The minimal robust positive invariant (mRPI) set, defined as the RPI set contained in any closed RPI set is known to be unique, compact and—in the case when  $\Delta$  contains the origin—to contain the origin [217]. Its construction is dependent on the structure of  $A, B$  and the topology of  $\Delta$  (the framework used to describe the disturbance set  $\Delta$  will be the polytopic one).

The exact computation of the mRPI set is assured only under restrictive assumptions of nilpotent system dynamics for the subsystem affected by the disturbances [233]. In [211] a recursive procedure is proposed to find an  $\epsilon$ -outer approximation of the mRPI set. In [259] an improved algorithm provides the maximal number of iterations for the obtention of the outer approximation for a given  $\epsilon$ . Both approaches assume that  $0 \in \text{int}(\Delta)$ .

In the following we are interested in the general case where (although not necessarily) it is allowed for  $0 \notin \Delta$ . It will be shown that a certified  $\epsilon$ -outer approximation can be obtained using a contractive procedure starting from an initial RPI set. This initial set can be obtained upon ultimate bounds, for example using the results provided in the next theorem. In the sequel, inequalities between vectors are to be interpreted componentwise.

**Theorem 4.** *Consider the system (183), let  $A = V\Lambda V^{-1}$  be the Jordan decomposition of  $A$  and consider a bounding box for the set  $\Delta$ . If this bounding box is described by the vector  $\bar{\delta}$  which satisfies  $|\delta| \leq \bar{\delta}, \forall \delta \in \Delta$  then the set :*

$$\Phi_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |V^{-1}x| \leq (I - |\Lambda|)^{-1} |V^{-1}B| \bar{\delta}\}, \quad (184)$$

*is robust positively invariant (RPI).*

*Proof :* See [271]. ■

In order to refine this invariant set, a sequence of sets can be recursively built by considering the Minkowski sum between the image of an RPI set through the linear transformation  $A$  and the polyhedral set  $B\Delta$  :

$$\Phi_{k+1} = A\Phi_k \oplus B\Delta \quad (185)$$

The definition (185) of the sequence  $\Phi_k$  preserves the invariance properties.

**Theorem 5.** *Let  $\Phi_0$  be as defined in Theorem 1. Then the sequence  $\Phi_k, \forall k \in \mathbb{N}$ , satisfies  $\Phi_{k+1} \subset \Phi_k$ , and  $\Phi_k$  is convex, compact and an RPI set with respect to (183).*

*Proof :* Note from (184) that  $\Phi_0$  is a compact and convex set. It is assumed that the set  $\Delta$  containing the disturbance also has these two properties. Convexity and compactness are then guaranteed by construction since the sets  $\Phi_k$  are given by the Minkowski sum (185) of compact, convex sets. For all  $x(1) \in \Phi_1$  there exists an  $x(0) \in \Phi_0$  and  $\delta(0) \in \Delta$  such that  $x(1) = Ax(0) + B\delta(0)$ . Due to the positive invariance of the set  $\Phi_0$  assured by Theorem 1, it follows that  $x(1) \in \Phi_0$  and thus  $\Phi_1 \subset \Phi_0$ .

Moreover, (185) and  $\Phi_1 \subset \Phi_0$  imply that if  $x \in \Phi_1$  then  $Ax + B\delta \in \Phi_1, \forall \delta \in \Delta$  and hence  $\Phi_1$  is RPI.

We have established thus far that  $\Phi_1$  is RPI and  $\Phi_1 \subset \Phi_0$  provided  $\Phi_0$  is RPI. Exactly the same argument will show that, provided  $\Phi_k$  is RPI, then  $\Phi_{k+1}$  computed from (185) will be RPI and  $\Phi_{k+1} \subset \Phi_k$ . This completes the proof by induction. ■

*Remark 8.* The initial set  $\Phi_0$  in the set recursion (185) can be in fact any RPI set for the dynamics (183). Theorem 4 provides a simple and direct way of obtaining the initial condition using ultimate bounds (184), in view of an algorithmic implementation.

Our next theorem shows that the limiting sequence obtained from (185) will lead to an approximation of the mRPI. Indeed, let  $\Omega$  be the mRPI set, defined as the limit of all the possible trajectories of (183). Equivalently (see [259]) the mRPI set can be described as  $\Omega = \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k$  with

$$\Omega_k = \bigoplus_{i=0}^k A^i B\Delta \quad (186)$$

**Theorem 6.**  $\Phi_k \rightarrow \Omega$  for  $k \rightarrow \infty$ .

*Proof :* Writing explicitly the dependence (185) :

$$\Phi_k = A^k \Phi_0 \bigoplus_{i=0}^{k-1} A^i B\Delta \quad (187)$$

and using (186) one can recast

$$\Phi_k = A^k \Phi_0 \oplus \Omega_{k-1} \quad (188)$$

From theorem 5, the sequence  $\Phi_{k+1} \subset \Phi_k$ . At the same time,  $\Omega$  represents a lower bound for this sequence, since :

$$\Phi_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \{A^k \Phi_0 \oplus \Omega_{k-1}\} = \Omega \oplus \lim_{k \rightarrow \infty} \{A^k \Phi_0\} \quad (189)$$

It can then be seen that, if all the eigenvalues of  $A$  are strictly inside the unit circle, then the sequence  $\Phi_k$  converges towards the mRPI set  $\Omega$  when  $k \rightarrow \infty$ . ■

The following theorem uses the set recursion (185) to obtain outer  $\epsilon$ -approximations of the mRPI set  $\Omega$

**Theorem 7.** *For all  $\epsilon > 0$  there exists an  $s \in \mathbb{N}^+$  such that the following RPI outer  $\epsilon$ -approximation exists :*

$$\Omega \subset \Phi_{s+1} \subset \Omega \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon) \quad (190)$$

*Proof :* Exploiting the fact that  $\Omega \subset \Phi_0$  :

$$\begin{aligned} \Omega &= \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i B \Delta = \bigoplus_{i=0}^s A^i B \Delta \oplus A^{s+1} \underbrace{\left( \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i B \Delta \right)}_{\Omega} \\ &= \bigoplus_{i=0}^s A^i B \Delta \oplus A^{s+1} \Omega \subset \bigoplus_{i=0}^s A^i B \Delta \oplus A^{s+1} \Phi_0 = \Phi_{s+1} \end{aligned} \quad (191)$$

the first inclusion is obtained.

Next, note that from the definition of  $\mathbb{B}_p^n(\epsilon)$  it follows that  $\mathbb{B}_p^n(\epsilon) = \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2) \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2)$ . Then, by choosing  $s$  such that  $A^{s+1} \Phi_0 \subset \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2)$  we have :

$$\begin{aligned} \Omega \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon) &= \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i B \Delta \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon) = \\ &= \bigoplus_{i=0}^s A^i B \Delta \oplus A^{s+1} \Omega \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2) \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2) \supset \\ &= \bigoplus_{i=0}^s A^i B \Delta \oplus A^{s+1} \Omega \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2) \oplus A^{s+1} \Phi_0 = \\ &= \Phi_{s+1} \oplus A^{s+1} \Omega \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2) \supset \Phi_{s+1} \oplus A^{s+1} (\Omega \oplus \Phi_0) \end{aligned} \quad (192)$$

Taking into account (see (184)) that  $0 \in \Phi_0$ ,  $\Phi_0$  is symmetric and  $\Omega \subset \Phi_0$  we have :

$$0 \in (\Omega \oplus \Phi_0) \quad (193)$$

Using (193) in (192) it follows :

$$\Omega \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon) \supset \Phi_{s+1} \oplus A^{s+1} (\Omega \oplus \Phi_0) \supset \Phi_{s+1} \quad (194)$$

and the proof is complete. ■

The previous theorems show that iterating the set construction in (185) a contractive refinement of the invariant set obtained using ultimate bounds,  $\Phi_0$ , can be found. Moreover, the theorems show that the set sequence obtained with (185) converges to the minimal positive invariant set  $\Omega$  and that the maximal number of iterations needed to find an  $\epsilon$ -approximation can be computed *a priori*, thus providing an effective stopping criterion.

*Remark 9.* Observing that the intersection of RPI sets is an RPI set, an improved  $\epsilon$ -approximation can be obtained by working in parallel with a contractive and an expansive algorithm. For the case  $0 \in \text{int}(\Delta)$  the presented technique and the one in [259] can be used to provide, in a fix number of steps, a better  $\epsilon$ -approximation.

*Remark 10.* From a computational point of view, the sensitivity of the construction procedure can be improved if instead of working with system (183), a transformation  $x(k) = Vz(k)$  is performed based on the Jordan matrix decomposition as in Theorem 4. In the case when a subset of the eigenvalues of the linear system are placed at the origin the Jordan form can be decomposed as :

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix} \quad (195)$$

where  $A_0$  contains the zero eigenvalues of  $A$ , and the algorithm can be applied only for the state components corresponding to  $\tilde{A}$ .

The construction of the approximation of the mRPI set is summarised in the following algorithm.

**Algorithm 1 :** Approximation of the mRPI set

*Input arguments :* The pair  $(A, B)$ , the disturbance set  $\Delta$  and the scalar  $\epsilon > 0$ .

*Output :* The RPI  $\epsilon$ -approximation of the mRPI set.

- 1) Compute the Jordan decomposition of  $A$ ;
- 2) Build the initial RPI set  $\Phi_0$  using ultimate bounds (184);
- 3) Find  $s$ , such that  $A^{s+1}\Phi_0 \subset \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2)$ ;
- 4) For  $k = 1$  to  $k = s + 1$

compute the set  $\Phi_k$  using (185). ■

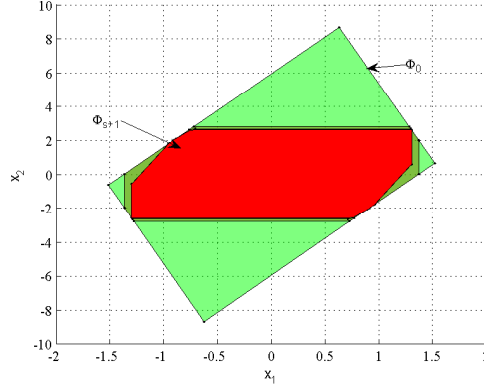
A simple illustration of the procedure is given for the system :

$$x^+ = \begin{bmatrix} -0.17 & -0.03 \\ -1.17 & -0.03 \end{bmatrix} + \delta \quad (196)$$

with  $\Delta = \{\delta \in \mathbb{R}^2 : \|\delta\|_\infty \leq 1\}$ . Figure 59 presents the construction of a sequence of sets  $\Phi_k$  in view of a desired approximation of  $\epsilon = 10^{-5}$ , which is obtained for  $s = 10$ .

#### IV-3.2 Switching between sets of disturbances

In the framework of the multisensor fault tolerant control systems that will be explained below, in Section 4, the case of arbitrary switches between  $N$  different



**Figure 59.** Approximations of  $\Omega$  based on a contractive procedure.

sets of disturbances has to be considered, namely :

$$\begin{aligned} x^+ &= Ax + B_l \delta_l \\ \delta_l &\in \Delta_l, l \in \{1, \dots, N\} \end{aligned} \quad (197)$$

The mRPI set is, in this case, in general nonconvex. In order to obtain a convex RPI approximation, a certain degree of conservativeness has to be introduced by considering the convex hull of the sets of disturbances. This leads to a linear model similar to (183), that is :

$$\begin{aligned} x^+ &= Ax + \nu, \quad \nu \in \Delta \\ \Delta &= \text{Conv.Hull}\{B_1 \Delta_1, \dots, B_N \Delta_N\} \end{aligned} \quad (198)$$

The construction of a refined RPI set can follow the lines presented in the previous subsection.

We next revisit the numerical example (196) with the additive disturbance  $\delta$  switching freely between the sets  $\Delta_1 = \{\delta \in \mathbb{R}^2 : \|\delta\|_\infty \leq 0.8\}$  and

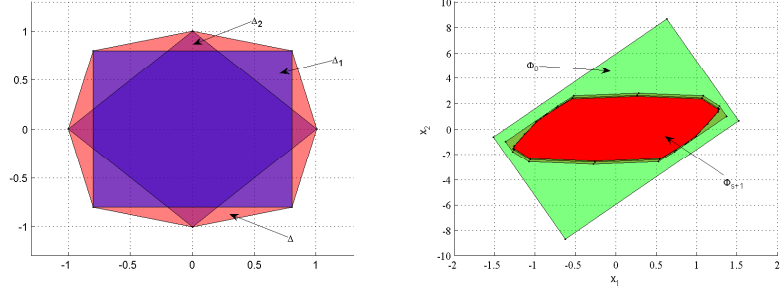
$$\Delta_2 = \left\{ \delta \in \mathbb{R}^2 : \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \delta \right| \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (199)$$

In Figure 60 the sets  $\Delta_1, \Delta_2$  are represented together with their convex hull, while the RPI set construction is illustrated in Figure 61.

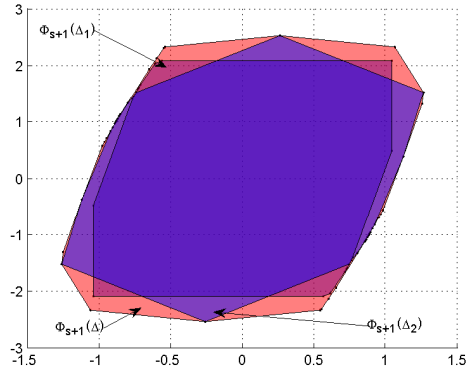
### IV-3.3 mRPI with inclusion preserving

Consider again the discrete-time LTI systems subject to disturbance :

$$x^+ = Ax + B\delta \quad (200)$$



**Figure 60.**  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  and the convex hull  $\Delta$ . RPI set for the switching scheme using  $\Delta$ .



**Figure 61.** The RPI set for the switching scheme using  $\Delta$  and the RPI sets for  $\Delta_1$  and  $\Delta_2$  separately.

with  $A$  strictly stable and  $\delta \in \Delta$  a polytopic set. Also consider a given bounded set  $P \subset \mathbb{R}^n$  which can be interpreted as the region where the state evolution is initiated. Following the ideas of the previous subsections, the construction of an RPI approximation for the minimal RPI set which assures the inclusion of  $P$  will be sketched.

In order to use a recursive procedure, an initial RPI set  $\Psi_0$  with the desired property  $\Psi_0 \supset P$  has to be devised. The set  $\Phi_0$  constructed using (184) does not necessarily satisfy the inclusion but it has the auxiliary property that  $0 \in$

$int(\Phi_0)$ . Using this property and the scaling factor<sup>15</sup> :

$$\mu^* = \mu^*(\Phi_0, P) = \min_{\substack{\mu \geq 1 \\ P \subset \mu\Phi_0}} \mu \quad (201)$$

the next result is available.

**Proposition 1.**  $\Psi_0 = \mu^*\Phi_0$  is a robust positive invariant set for (200) and  $P \subset \Psi_0$ .

*Proof :* From Theorem 4 we have that the set  $\Phi_0$  is RPI for (200). It follows from the definition of  $\Phi_0$  in (184) that multiplication by any scalar  $\mu \geq 1$  preserves the RPI property while (201) assures  $P \subset \mu^*\Phi_0 = \Psi_0$ . ■

In order to refine recursively this RPI set while preserving the inclusion, the following sequence is considered :

$$\Psi_{k+1} = Conv.Hull \{P, A\Psi_k \oplus B\Delta\} \quad (202)$$

**Theorem 8.**  $\Psi_{k+1} \subset \Psi_k$  and  $P \subset \Psi_k, \forall k \in \mathbb{N}$ . If  $\Phi_0$  is bounded then  $\Psi_k$  is convex, compact and an RPI set for (200).

*Proof :* Convexity, compactness and the inclusion  $P \subset \Psi_k$  are guaranteed by construction (202). From Proposition 8 we have that  $\Psi_0$  is RPI. Suppose now that, for some  $k \geq 0$ ,  $\Psi_k$  is RPI, then from the convexity of  $\Psi_k$  we have :

$$\left. \begin{array}{l} P \subset \Psi_k \\ A\Psi_k \oplus B\Delta \subset \Psi_k \end{array} \right\} \Rightarrow \Psi_{k+1} \subset \Psi_k \quad (203)$$

The robust positive invariance of the sequence  $\Psi_k$  follows by induction in analogous fashion as in the proof of Theorem 5. ■

Denoting  $\Omega_P$  the minimal RPI set that preserves the inclusion  $P \subset \Omega_P$ , and using the fact that the mRPI set  $\Omega$  is an attractor for the trajectories of (200), it follows that  $\Omega_P$  can be described explicitly as the union of all the trajectories starting inside  $P$  and leading to  $\Omega$  :

$$\Omega_P = P \bigcup_{i=0}^{\infty} \left\{ A^{i+1}P \bigoplus_{j=0}^i A^j B\Delta \right\} \cup \Omega \quad (204)$$

---

15. If  $\Phi_0$  and  $P$  are polytopic sets one can write :

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_0 x \leq b_0\} \\ P &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \mathbf{v}_i, \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

with  $\mathcal{I}$  the index set of vertices of  $P$ . Note also that from  $0 \in int(\Phi_0)$  it follows that all the elements of  $b_0$  are different from zero. Then the scaling factor can be found as solution of the LP problem :

$$\mu^*(\Phi_0, P) = \min_{\substack{\mu \geq 1 \\ A_0 \mathbf{v}_i \leq \mu b_0, i \in \mathcal{I}}} \mu$$



As it can be seen from (204),  $\Omega_P$  may in general be nonconvex. Consider now the set :

$$\bar{\Omega}_P = \text{Conv.Hull} \left\{ P \bigcup_{i=0}^{\infty} \left\{ A^{i+1} P \bigoplus_{j=0}^i A^j B \Delta \right\} \cup \Omega \right\}, \quad (205)$$

then, it can be easily shown (from the robust positive invariance of  $\Omega_P$  and the convexity of  $\bar{\Omega}_P = \text{Conv.Hull}\{\Omega_P\}$ ) that  $\bar{\Omega}_P$  is an RPI set. In fact,  $\bar{\Omega}_P$  is the minimal convex RPI set that preserves the inclusion  $P \subset \bar{\Omega}_P$ .

**Theorem 9.**  $\Psi_k \rightarrow \bar{\Omega}_P$  for  $k \rightarrow \infty$ .

*Proof :*  $\Psi_0$  is a convex RPI set satisfying  $P \subset \Psi_0$ . Hence, we can write :

$$\Psi_0 = \text{Conv.Hull} \{P, \Psi_0\} \quad (206)$$

Then, for  $\Psi_1$  we have that :

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \text{Conv.Hull} \{P, A\Psi_0 \oplus B\Delta\} \\ &= \text{Conv.Hull} \{P, A \cdot \text{Conv.Hull} \{P, \Psi_0\} \oplus B\Delta\} \\ &= \text{Conv.Hull} \{P, \text{Conv.Hull} \{AP, A\Psi_0\} \oplus B\Delta\} \\ &= \text{Conv.Hull} \{P, \text{Conv.Hull} \{AP \oplus B\Delta, \\ &\quad A\Psi_0 \oplus B\Delta\}\} \\ &= \text{Conv.Hull} \{P, AP \oplus B\Delta, A\Psi_0 \oplus B\Delta\}. \end{aligned} \quad (207)$$

Proceeding with the same operations as in (206) and (207), it can be shown inductively that, for  $k \geq 1$ ,  $\Psi_k$  has the form :

$$\begin{aligned} \Psi_k &= \text{Conv.Hull} \{P, AP \oplus B\Delta, \dots \\ &\quad \dots, A^k P \bigoplus_{j=0}^{k-1} A^j B \Delta, A^k \Psi_0 \bigoplus_{j=0}^{k-1} A^j B \Delta\} \end{aligned} \quad (208)$$

If  $A$  is asymptotically stable we have, when  $k \rightarrow \infty$ , that  $A^k \Psi_0 \rightarrow \{0\}$  and  $\bigoplus_{j=0}^{k-1} A^j B \Delta \rightarrow \Omega$ , which implies :

$$\Psi_k \rightarrow \text{Conv.Hull} \left\{ P, \bigcup_{i=0}^{\infty} \left\{ A^{i+1} P \bigoplus_{j=0}^i A^j B \Delta \right\}, \{0\} \oplus \Omega \right\} \quad (209)$$

Finally, we conclude from (205) and (209) that  $\Psi_k \rightarrow \bar{\Omega}_P$  as  $k \rightarrow \infty$ . ■

The following result proves that an  $\epsilon$ -approximation for  $\bar{\Omega}_P$  can be found in a finite number of iterations.

**Theorem 10.** For all  $\epsilon > 0$  there exists an  $s \in \mathbb{N}^+$  such that the following RPI outer  $\epsilon$ -approximation exists :

$$\bar{\Omega}_P \subset \Psi_{s+1} \subset \bar{\Omega}_P \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon) \quad (210)$$

*Proof :* The first inclusion in (210) follows from the facts that, by Theorem 9,  $\Psi_{s+1}$  is convex, RPI and  $P \subset \Psi_{s+1}$ , and the fact that  $\bar{\Omega}_P$  is the minimal convex RPI set that preserves the inclusion  $P \subset \bar{\Omega}_P$ .

Next, we have that for all  $\epsilon > 0$  there exists an  $s \in \mathbb{N}^+$  such that  $A^{s+1}\Psi_0 \subset \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2)$ . Then, by following similar steps as in (191) and (192), we have :

$$\begin{aligned}
 \Omega \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2) &= \bigoplus_{j=0}^{\infty} A^j B \Delta \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2) \\
 &= \bigoplus_{j=0}^s A^j B \Delta \oplus A^{s+1} \Omega \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2) \\
 &\supset \bigoplus_{j=0}^s A^j B \Delta \oplus A^{s+1} (\Omega \oplus \Psi_0)
 \end{aligned} \tag{211}$$

Taking into account that, from (184), we have  $0 \in \Phi_0$  and that  $\Psi_0 = \mu^* \Phi_0$  with  $\mu^* \geq 1$ , we then have that  $0 \in \Psi_0$  and  $\Psi_0$  is symmetric. Also, considering that  $\Psi_0$  is RPI (Proposition 8) and that  $\Omega$  is the mRPI set, we have  $\Omega \subset \Psi_0$ . Thus, we conclude that

$$0 \in (\Omega \oplus \Psi_0)$$

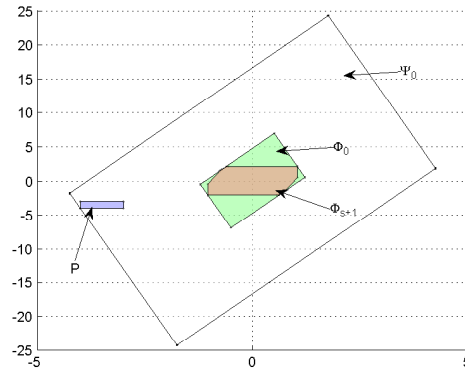
and, hence, we have in (211), that

$$\Omega \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2) \supset \bigoplus_{j=0}^s A^j B \Delta$$

Next, we have :

$$\begin{aligned}
& \bar{\Omega}_P \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon) \\
&= \bar{\Omega}_P \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2) \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2) \\
&\supset \bar{\Omega}_P \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2) \oplus A^{s+1}\Psi_0 \\
&= \text{Conv.Hull}\{P \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2), \bigcup_{i=0}^{\infty} \{A^{i+1}P \\
&\quad \bigoplus_{j=0}^i A^j B \Delta \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2)\}, \Omega \oplus \mathbb{B}_p^n(\epsilon/2)\} \oplus A^{s+1}\Psi_0 \\
&\supset \text{Conv.Hull}\{P, \bigcup_{i=0}^s \{A^{i+1}P \bigoplus_{j=0}^i A^j B \Delta\}, \\
&\quad \bigoplus_{j=0}^s A^j B \Delta\} \oplus A^{s+1}\Psi_0 \\
&\supset \text{Conv.Hull}\{P, \bigcup_{i=0}^s \{A^{i+1}P \bigoplus_{j=0}^i A^j B \Delta\}, \\
&\quad A^{s+1}\Psi_0 \bigoplus_{j=0}^s A^j B \Delta\} \\
&= \Psi_{s+1}.
\end{aligned}$$

This proves the second inclusion in (210), and the proof is complete.  $\blacksquare$



**Figure 62.** Construction of an RPI set  $\Psi_0 \supset P$  by scaling up  $\Phi_0$  (Proposition 8).

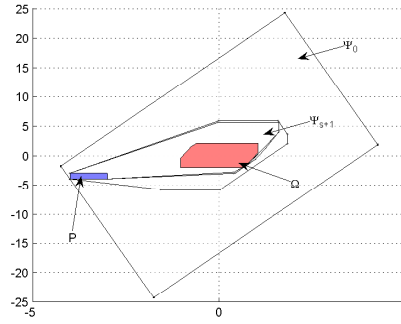
We revisit the numerical example (196) with

$$\Delta = \{\delta \in \mathbb{R}^2 : \|\delta\|_\infty \leq 1\} \quad (212)$$

and a set of initial conditions

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} \leq x \leq \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \quad (213)$$

Figure 62 depicts the initial RPI set  $\Psi_0 \supset P$  while Figure 63 presents the



**Figure 63.** Recursive procedure for the construction of an outer  $\epsilon$ -approximation for the minimal convex RPI set that includes  $P$ .

sequence of refined convex RPI sets  $\Psi_k$ , computed recursively using (202), which preserve the inclusion  $\Psi_k \supset P$ .

#### IV-4 Switching control strategy

In this section we use the invariant sets constructed in the preceding sections to define a switching control strategy with fault-tolerance guarantees for the multisensor scheme described in Section 2.

##### IV-4.1 Invariant sets for estimation errors and sensor reference signals

The polyhedral sets that describe the disturbances and the measurement noises,  $W$ ,  $N_i$  and  $N_i^F$ , are assumed to contain the origin in their interiors. These sets can be confined inside symmetric bounding boxes :

$$|w| \leq \bar{w}; \quad |\eta_i| \leq \bar{\eta}_i; \quad |\eta_i^F| \leq \bar{\eta}_i^F; \quad (214)$$

where  $\bar{w}$ , etc., are vectors of bounds with positive elements.

Recall from (181) that the estimation error dynamics during healthy sensor operation satisfy :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_i^+ \\ \tilde{\xi}_i^+ \end{bmatrix} = A_{L_i} \begin{bmatrix} \tilde{x}_i \\ \tilde{\xi}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_\Sigma & -L_i \\ 0 & -L_{s_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \eta_i \end{bmatrix} \quad (215)$$

with the matrices  $A_{L_i}$  strictly stable and with input  $[w \ \eta_i]'$  bounded as in (214).

We begin by computing, using (184), the initial invariant set that corresponds to the dynamics (215) and bounds (214). Then, iterating (185) for system (215) and sets  $W, N_i$  according to Algorithm 1, we can obtain, for a given  $\epsilon > 0$  :

$\tilde{S}_i = RPI \ \epsilon$ -approximation of the mRPI set for the  $i$ -th estimation error under healthy sensor operation.

The sensor reference signals  $\xi_{i,ref}$  (see Table 1) satisfy :

$$\xi_{i,ref}^+ = A_{s_i} \xi_{i,ref} + B_{s_i} C_\Sigma x_{ref} \quad (216)$$

where, as explained in Section 2.2, the state of the reference model is contained in a set  $X_{ref} \subset \mathbb{R}^n$  determined by the constraints on the reference input  $u_{ref}$  (notice that it is possible that  $0 \notin X_{ref}$ , and that this is allowed in Algorithm 1). Confining  $X_{ref}$  inside a symmetric box we can write :

$$|x_{ref}| \leq \bar{x}_{ref} \quad (217)$$

The invariant set construction procedure can be initialized using (184) for the dynamics (216) and bounds (217). Then, iterating (185) for system (216) and set  $X_{ref}$  we obtain, using Algorithm 1 :

$S_{i,ref} = RPI \ \epsilon$ -approximation of the mRPI set for the  $i$ -th sensor reference signal.

The sets  $\tilde{S}_i$  and  $S_{i,ref}$  defined above will be used in the following subsection to compute refined invariant sets for the tracking error dynamics under healthy and faulty operation."

#### IV-4.2 Optimal control upon healthy estimations

Let us now consider an optimal control problem for the tracking error system  $(A_\Sigma, B_\Sigma)$  (see Table 3), with  $Q > 0$  and  $R > 0$  as the weighting parameters for the tracking error states and control effort respectively. By solving the associated Riccati equation one can obtain the optimal linear gain  $K$  and cost function matrix  $P$  as follows :

$$K = (R + B'_\Sigma P B_\Sigma)^{-1} B'_\Sigma P A_\Sigma \quad (218)$$

$$P = A'_\Sigma P A_\Sigma + Q - K'(R + B'_\Sigma P B_\Sigma)K \quad (219)$$

Consider the control law :

$$u = u_{ref} - K \hat{z}_l^{UP} \quad (220)$$

where  $\hat{z}_l^{UP}$  is the estimation “update” for the  $l$ -th sensor, supposed healthy :

$$\hat{z}_l^{UP} = \hat{x}_l^{UP} - x_{ref} = \hat{x}_l + M_l(y_l - C_{s_l}\hat{\xi}_l) - x_{ref} \quad (221)$$

The update matrix  $M_l$  is obtained from :

$$\begin{bmatrix} A_\Sigma & 0 \\ B_{s_l}C & A_{s_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_l \\ M_{s_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_l \\ L_{s_l} \end{bmatrix} \quad (222)$$

Assuming that the control law (220) can be based on information from any sensor  $l \in \{1, \dots, N\}$  which has been functioning without failure for sufficiently long time, we have the following closed-loop dynamics for the plant tracking error :

$$z^+ = \underbrace{(A_\Sigma - B_\Sigma K)}_{A_z} z + \quad (223)$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} E_\Sigma & B_\Sigma K & -B_\Sigma K M_l C_{s_l} & -B_\Sigma K M_l \end{bmatrix}}_{B_z} \begin{bmatrix} w \\ \tilde{x} \\ \tilde{\xi}_l \\ \eta_l \end{bmatrix} \quad (224)$$

The above corresponds to a system of the type (198), which switches between different sets of disturbances. Using the arguments in Subsection 3.2 and adapting Algorithm 1, we can construct, for the dynamics (224) and the sets  $W, N_i, \tilde{S}_l$  with  $l \in \{1, \dots, N\}$ , the set :

$S_z = \text{RPI } \epsilon\text{-approximation of the mRPI set for the plant tracking error.}$

Subsequently using the set  $S_z$  for each sensor dynamics as described in Table 3 :

$$\zeta_i^+ = A_{s_i}\zeta_i + B_{s_i}Cz \quad (225)$$

we obtain by direct application of Algorithm 1 :

$S_{\zeta_i} = \text{RPI } \epsilon\text{-approximation of the mRPI set for the } i\text{-th sensor tracking error.}$

For the estimated tracking error corresponding to healthy sensors, and assuming that only healthy sensors are used to implement the control law, the closed-loop dynamics can be written explicitly as :

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_i^+ \\ \hat{\zeta}_i^+ \end{bmatrix} = A_{L_i} \begin{bmatrix} \hat{z}_i \\ \hat{\zeta}_i \end{bmatrix} + B_{li}\nu_{li} \quad (226)$$

with

$$B_{li} = \begin{bmatrix} -B_\Sigma K & B_\Sigma K & -B_\Sigma K M_l C_{s_l} & -B_\Sigma K M_l & L_i C_{s_i} & L_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{s_i} C_{s_i} & L_{s_i} \end{bmatrix} \quad (227)$$

$$\nu_{li} = [z' \tilde{x}' \tilde{\xi}_l' \eta_l' \zeta_i' \eta_i']'$$

Considering (226) and combining all the intermediate invariant sets  $S_z, \tilde{S}_l, N_l, S_{\zeta_i}, N_i$  we can obtain by means of Algorithm 1 (using as input argument the convex hull of the possible sets of disturbances) :

$\hat{S}_i =$  RPI  $\epsilon$ -approximation of the mRPI set for the estimated tracking error of the  $i$ -th healthy sensor.

In the case of a fault as described in (179), and assuming that only healthy sensors are used to implement the control law, the closed-loop dynamics of the estimated tracking error for the  $j$ -th failed sensor can be shown to become :

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_j^+ \\ \hat{\zeta}_j^+ \end{bmatrix} = A_{L_j} \begin{bmatrix} \hat{z}_j \\ \hat{\zeta}_j \end{bmatrix} + B_{L_j} \nu_{L_j}^F \quad (228)$$

with

$$\nu_{L_j}^F = \begin{bmatrix} z' & \tilde{x}_l' & \tilde{\xi}_l' & \eta_l' & -\xi_{j,ref}^F' & \eta_j^F' \end{bmatrix}' \quad (229)$$

and  $B_{L_j}$  as in (226).

Proceeding as for the healthy sensors' tracking error, by replacing the sets  $S_{\zeta_i}, N_i$  by  $-S_{j,ref}$  and  $N_j^F$ , we can construct the set :

$\hat{S}_j^F =$  RPI  $\epsilon$ -approximation of the mRPI set for the estimated tracking error of the  $j$ -th faulty sensor,

upon an algorithm which preserves the inclusion  $\hat{S}_j^F \supset \hat{S}_j$ , as explained in Subsection IV-3.3.

#### IV-4.3 Switching strategy and fault tolerance

The optimal control law (220) was based on the assumption that the estimation update is provided by a *healthy sensor*. The way of switching among these estimation updates corresponding to healthy sensors characterises the stability and fault tolerance properties of the multisensor control scheme. The following result establishes these properties.

**Proposition 2.** *Suppose the following assumptions are fulfilled :*

- (1) *At any time instant, at least one of the following two situations is true :*
  - a) *all sensors are healthy;*
  - b) *at least one sensor is healthy; in addition, all healthy sensors have estimation errors inside the invariant set  $\tilde{S}_i$  and at least one healthy  $l$ th sensor has the states of the corresponding estimated tracking error in the invariant set  $\hat{S}_l$ .*
- (2)  *$(\hat{z}_i^{UP})' P \hat{z}_i^{UP} < (\hat{z}_j^{UP})' P \hat{z}_j^{UP}$  for all  $i, j = 1, \dots, N, i \neq j$  and*

$$\hat{z}_i^{UP} \in [I - M_i C_{s_i}] \hat{S}_i \oplus M_i N_i \oplus M_i C_{s_i} S_{\zeta_i} \quad (230)$$

$$\hat{z}_j^{UP} \in [I - M_i C_{s_i}] \hat{S}_i^F \oplus M_i N_i^F \oplus M_i C_{s_i} S_{j,ref} \quad (231)$$

where  $P$  is the cost function matrix defined in (219).

- (3)  $\hat{S}_i^F \supset \hat{S}_i$  for all  $i = 1, \dots, N$ .

Then the closed-loop system with :

$$u = u_{ref} - K \arg \min_{\hat{z}_l^{UP}} (\hat{z}_l^{UP})' P \hat{z}_l^{UP} \quad (232)$$

is stable and fault tolerant. ■

The proof can be consulted in [271]. Item (1) of the above proposition is concerned with the allowed failure scenario, whereas items (2) and (3) represent a set of tests that can be performed off line to ensure fault tolerance of the multisensor switching scheme. In [271], conservatism was introduced due to the fact that the relevant invariant sets used in the tests for fault tolerance were constructed using the ultimate bound procedure of Theorem 4. In the present paper, the procedure to construct the required invariant sets is refined so that these sets arbitrarily approximate the mRPI sets for each dynamics involved in the development. Thus, conservatism is largely reduced and the range of application of the fault tolerant multisensor switching scheme is extended. Moreover, the property  $\hat{S}_i^F \supset \hat{S}_i$  is assured by construction.

## IV-5 Example

In this section we illustrate the potential to extend the applicability of the fault tolerant multisensor switching scheme—in this case, to a larger range of reference signals for a given system—as a result of the refinement of the invariant sets utilised in the tests for fault tolerance guarantees of Proposition 2.

Consider the longitudinal control problem for a car following scenario as described in [231] and revisited in [271]. The interdistance dynamics are represented by a discretised double integrator model :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}; C = [0 \ 1] \quad (233)$$

We consider two sensors with dynamics given by the linear models in Table 1 with

$$A_{s_1} = 0.6065, B_{s_1} = 0.5, C_{s_1} = 0.7869 \quad (234)$$

$$A_{s_2} = 0.8187, B_{s_2} = 0.5, C_{s_2} = 0.3625 \quad (235)$$

The disturbances and measurement noises are bounded as

$$|w| \leq 0.02, |\eta_i| \leq 0.1, |\eta_i^F| \leq 0.1, i = 1, 2 \quad (236)$$

In [271] it was shown that a switching scheme as described in Section 2 and based on an optimal control law designed with weights

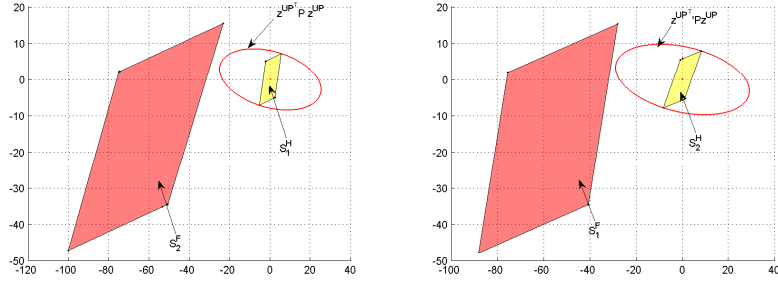
$$Q = \begin{bmatrix} 0.1007 & 0 \\ 0 & 6.3187 \end{bmatrix}; R = 7.2598 \quad (237)$$



in (218)–(219), can stabilise the system and provide fault tolerance guarantees for reference signals elementwise bounded as

$$\begin{bmatrix} 33 \\ -10 \end{bmatrix} \leq x_{ref} \leq \begin{bmatrix} 75 \\ 0.08 \end{bmatrix} \quad (238)$$

The fault tolerance conditions given in item (2) of Proposition 2 can be interpreted geometrically as a separation in the  $\hat{z}_i^{UP}$  space between the healthy and faulty invariant sets  $S_i^H$  and  $S_j^F$  [defined, respectively, as the sets on the right-hand-sides of (230) and (231)] with respect to the curves with equal cost  $(\hat{z}_i^{UP})' P \hat{z}_i^{UP}$ . This geometric interpretation is illustrated in Figure 64, where the invariant sets are constructed using the ultimate bound procedure of Theorem 4.



**Figure 64.** Invariant sets based on ultimate bounds guaranteeing the stability conditions  $(S_i^H = [I - M_i C_{s_i}] \hat{S}_i \oplus M_i N_i \oplus M_i C_{s_i} S_{\zeta_i})$  and  $S_i^F = [I - M_i C_{s_i}] \hat{S}_i^F \oplus M_i N_i^F \oplus M_i C_{s_i} S_{j,ref}$ .

It can be observed that the separation holds even if the invariant sets are constructed using ultimate bounds.

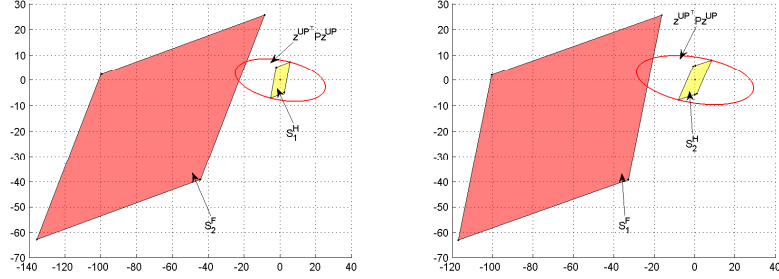
Note, however, that when the range of the reference signals is increased to :

$$\begin{bmatrix} 24 \\ -20 \end{bmatrix} \leq x_{ref} \leq \begin{bmatrix} 100 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (239)$$

the separation using the ultimate bound invariant sets does not hold anymore, as it can be observed in Figure 65.

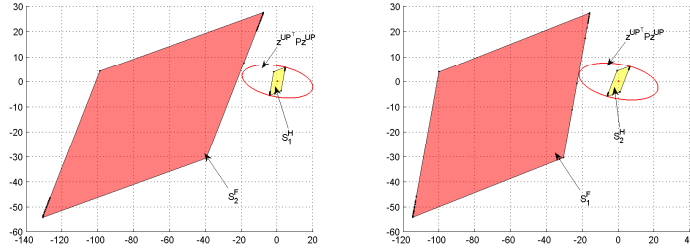
On the other hand, using the refined invariant set construction presented in this paper, where arbitrarily precise  $\epsilon$ -approximations of the mRPI sets can be computed, it can be shown that the stability under fault of the switching scheme is preserved for the enlarged range of reference signals (239). The separation using these sets is illustrated in Figure (66).

In general, employing the technique presented in this paper, the range of fault tolerant functioning of the multisensor switching control scheme can be enlarged.



**Figure 65.** Invariant sets based on ultimate bounds which fail to assure separation between the healthy and the faulty behaviour.

Moreover, taking into account the fact that the invariant sets are obtained with an arbitrary precision, important information can be obtained about limitations of the fault tolerant functioning domain when the only information available on the exogenous signals is their known bounds.



**Figure 66.** Refined invariant sets assuring the separation between the healthy and the faulty behaviour.

#### IV-6 Nonlinear multisensor schemes

Consider the problem of trajectory tracking for the nonlinear system  $\dot{x}(t) = f(x(t)) + bu(t)$ , where  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  is the state,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  is the control input,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  is a smooth vector field and  $b \in \mathbb{R}^{n \times m}$  is a constant matrix. In this nonlinear setting, the tracking problem implies the existence of a path  $\bar{x}(t)$  that steers the system from a state  $x_0$  at time  $t = 0$  to a state  $x_f$  at time  $t = T$ ,

by satisfying :

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t)) + b\bar{u}(t), \quad \bar{x}(0) = x_0, \bar{x}(T) = x_f. \quad (240)$$

Depending on the structure of the nonlinearity, the above trajectory generation problem may turn out to be a difficult two-point boundary value problem. Complementary requirements, such as passing through some specific intermediate points, the optimisation of a certain performance cost over the trajectory and/or input and state constraints satisfaction might have to be considered.

*Remark 11.* The trajectory generation problem can be tackled in different ways. For differentially flat nonlinear systems<sup>16</sup> [193], for example, feasible trajectories  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  satisfying (240) can be generated by using the parametrisation of the flat output  $\theta(t)$  upon a set of smooth basis functions  $\psi_i(t)$  :

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(t), \quad c_i \in \mathbb{R} \text{ such that } \begin{cases} \bar{x}(0) = \beta(\theta(0), \dot{\theta}(0), \dots, \theta^{(q)}(0)) = x_0, \\ \bar{x}(T) = \beta(\theta(T), \dot{\theta}(T), \dots, \theta^{(q)}(T)) = x_f. \end{cases}$$

Here we will assume that a feasible trajectory satisfying (240) is available. Then, a stabilising controller can be designed for the dynamical system describing the *tracking error* with variables  $z = x - \bar{x}$  and  $v = u - \bar{u}$ , that is,

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = F(z(t), \bar{x}(t)) + bv(t) \quad \text{where} \quad F(z, \bar{x}) \triangleq f(z + \bar{x}) - f(\bar{x}). \quad (241)$$

In the sequel, we will consider the discrete time counterpart of (241), given by

$$z(k+1) = G(z(k), \bar{x}(k)) + Bv(k) + w(k), \quad |w(k)| \leq \bar{w} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, \quad (242)$$

where  $w(k)$  is a bounded signal characterising the discretisation errors.<sup>17</sup>

In the following sections we will design a fault tolerant control scheme based on the following assumptions.

**Assumption 1** *The reference trajectories  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  are bounded, that is,  $\bar{x}(t) \in \bar{X}$ ,  $\bar{u}(t) \in \bar{U}$  for all  $t \geq 0$ , where  $\bar{X} \subset \mathbb{R}^n$  and  $\bar{U} \subset \mathbb{R}^m$  are bounded sets.*

**Assumption 2** *There exists a matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  and a continuous map  $\delta : \mathbb{R}_{+,0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}^n$  satisfying  $|z_1| \leq |z_2| \Rightarrow \delta(|z_1|) \leq \delta(|z_2|)$ , such that  $\forall z \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$|Az - G(z, \bar{x})| \leq \delta(|z|), \quad \forall \bar{x} \in \bar{X}.$$

In the light of Assumption 2 and footnote 17, we will rewrite (242) as

$$z^+ = Az + Bv + \gamma(z, \bar{x}) + w, \quad \text{where} \quad \gamma(z, \bar{x}) \triangleq G(z, \bar{x}) - Az, \quad (243)$$

and where  $\gamma(z, \bar{x})$  satisfies  $|\gamma(z, \bar{x})| \leq \delta(|z|)$ ,  $\forall \bar{x} \in \bar{X}$ .

16. A nonlinear system  $\dot{x} = f(x, u)$  is differentially flat if there exists a function  $\alpha$  such that  $\theta = \alpha(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(p)})$  and the solution of the nonlinear system can be written as function of the *flat output*  $\theta$  and a finite number of derivatives  $x = \beta(\theta, \dot{\theta}, \dots, \theta^{(q)})$ ,  $u = \gamma(\theta, \dot{\theta}, \dots, \theta^{(q)})$ .

17. We will henceforth use discrete time models, the time instant  $k$  will be omitted, and the successor state  $x(k+1)$  will be noted  $x^+$ . Also, bounds on system variables and external signals are considered elementwise.

## IV-7 Multisensor scheme and estimators

Different combinations of plant states are measured via a family of  $N$  sensors.

**Definition 5 (Healthy sensor).** *The  $i$ th sensor, for  $i \in \{1, \dots, N\}$ , is healthy if its output  $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$  is given by*

$$y_i = C_i z + \eta_i, \quad (244)$$

where  $z$  is the tracking error state of (243) and  $\eta_i \in \mathbb{R}^{p_i}$  is a bounded measurement disturbance satisfying  $|\eta_i(k)| \leq \bar{\eta}_i$ , for  $k \geq 0$ .<sup>18</sup>

**Definition 6 (Faulty sensor).** *The  $j$ th sensor, for  $j \in \{1, \dots, N\}$ , is faulty if its output at the time of the fault and for the duration of the fault is given by*

$$y_j = -C_j \bar{x} + \eta_j^F, \quad (245)$$

where  $\bar{x} \in \bar{X}$  is the reference trajectory and  $\eta_j^F$  is a bounded measurement noise satisfying  $|\eta_j^F(k)| \leq \bar{\eta}_j^F$ , for  $k \geq 0$ , uncorrelated with the system's states.

The sensors supply information which can be used for the estimation of the tracking error. Assuming that the pairs  $(A, C_i)$  are detectable for  $i = 1, \dots, N$ , we can use the following linear estimators :

$$\hat{z}_i^+ = A\hat{z}_i + Bv + L_i(y_i - C_i\hat{z}_i), \quad (246)$$

where the gains  $L_i$  are such that  $A - L_i C_i$  are Schur matrices (their eigenvalues are strictly inside the unit circle).

The following sections present the construction of invariant sets and the fault tolerant control design for the scheme depicted in Figure IV-7.

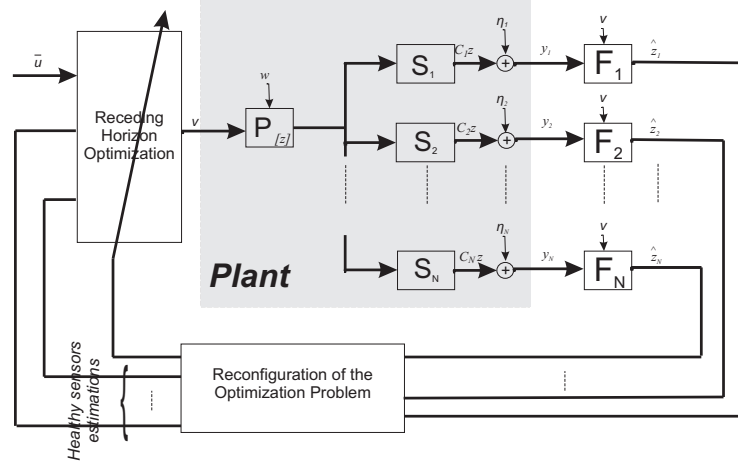
## IV-8 Invariant sets

The proposed fault detection and isolation mechanism relies on the existence of invariant sets for the tracking error and the estimation errors associated with the estimators (246) [271]. The invariant set construction uses the following result.

**Theorem 11.** *Consider the system  $\xi^+ = \Phi\xi + \gamma(\xi) + w$ , where  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $|w| \leq \bar{w}$  and  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$  has its eigenvalues strictly inside the unit circle and Jordan canonical form  $\Lambda = V^{-1}\Phi V$ . Suppose that a continuous map  $\delta : \mathbb{R}_{+,0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}^n$*

---

18. To simplify the exposition we have chosen to use static sensors. These sensor models provide a good approximation when the sensor dynamics are much faster than the process dynamics. Sensors with dynamics can also be utilised and the analysis carries through with minor modifications if the boundedness assumptions are preserved.



exists such that  $|\gamma(\xi)| \leq \delta(|\xi|)$  and it verifies  $|\xi_1| \leq |\xi_2| \Rightarrow \delta(|\xi_1|) \leq \delta(|\xi_2|)$ . Consider the map  $T : \mathbb{R}_{+,0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}^n$  defined by :

$$T(\xi) = |A|\xi + |V^{-1}|[\delta(|V|\xi) + \bar{w}]. \quad (247)$$

Suppose that a fix point  $b$  exists for  $T(\xi)$ . Let  $\xi_m \in \mathbb{R}^n$  denote any point satisfying  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(|V^{-1}\xi_m|) = b$ , where  $T^k$  is defined by the recursion :  $T^0(\xi) = \xi$ ,  $T^k(\xi) = T(T^{k-1}(\xi))$ . If the initial condition  $\xi_0$  satisfies  $|V^{-1}\xi_0| \leq |V^{-1}\xi_m|$  then for any  $\epsilon \in \mathbb{R}_+^n$  there exists  $l = l(\epsilon, \xi_m)$  such that  $\forall k \geq l$

$$|V^{-1}\xi(k)| \leq b + \epsilon. \quad (248)$$

**Proof :** The proof follows the lines of Theorem 4 in [216]. ■

For all estimators (246) taking measurements (244) from healthy sensors, the estimation error  $\tilde{z}_i \triangleq z - \hat{z}_i$  will evolve, using (243) and (246), according to

$$\tilde{z}_i^+ = (A - L_i C_i) \tilde{z}_i + \gamma(z, \bar{x}) + w - L_i \eta_i. \quad (249)$$

For a fixed structure control law  $v = -K\hat{z}_l$ , with  $K$  such that  $A - BK$  is a Schur matrix, built upon a *blind* switching strategy  $l \in \mathcal{I}$ , where  $\mathcal{I} \triangleq \{1, \dots, N\}$ , among the tracking estimations supposed *healthy*, then the tracking error satisfies the closed-loop dynamics

$$z^+ = Az - BK\hat{z}_l + \gamma(z, \bar{x}) + w = (A - BK)z + BK\tilde{z}_l + \gamma(z, \bar{x}) + w. \quad (250)$$

It can be observed that equations (249)–(250) are interdependent and they can not be decoupled as it is the case for linear systems (see [271]). The construction of invariant sets has then to be performed in the augmented *tracking error + estimation error* state space. Denoting the augmented state vector by

$$\zeta_{\mathcal{I}} \triangleq [z^T | \dots | \tilde{z}_i^T | \dots]^T, \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\}, \quad (251)$$

we have

$$\zeta_{\mathcal{I}}^+ = A_{\mathcal{I}}\zeta_{\mathcal{I}} + \gamma_{\mathcal{I}}(\zeta_{\mathcal{I}}, \bar{x}) + E_{\mathcal{I}}w_{\mathcal{I}}, \quad (252)$$

where  $A_{\mathcal{I}}$  is the Schur matrix

$$A_{\mathcal{I}} \triangleq \text{diag}(A - BK, \dots, A - L_i C_i, \dots), \quad \text{and} \quad (253)$$

$$\gamma_{\mathcal{I}}(\zeta_{\mathcal{I}}, \bar{x}) \triangleq \begin{bmatrix} \gamma(z, \bar{x}) + BK\tilde{z}_l \\ \vdots \\ \gamma(z, \bar{x}) \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad E_{\mathcal{I}} \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ I & -L_i \\ \vdots & 0 & \ddots \end{bmatrix}; \quad w_{\mathcal{I}} \triangleq \begin{bmatrix} w \\ \vdots \\ \eta_i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (254)$$

with  $l \in \mathcal{I}$  the index of the estimation selected for the construction of the feedback control action.

*Remark 12.* Using Assumption 2, it can be shown that the function

$$\delta_{\mathcal{I}}(|\zeta_{\mathcal{I}}|) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\delta(|z|) + \sum_{i \in \mathcal{I}} |BK| |\tilde{z}_i|}{\vdots} \\ \delta(|z|) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (255)$$

satisfies  $|\zeta_{\mathcal{I}1}| \leq |\zeta_{\mathcal{I}2}| \Rightarrow \delta_{\mathcal{I}}(|\zeta_{\mathcal{I}1}|) \leq \delta_{\mathcal{I}}(|\zeta_{\mathcal{I}2}|)$  and, moreover,  $\gamma_{\mathcal{I}}(\zeta_{\mathcal{I}}, \bar{x})$  defined in (254) can be bounded as

$$|\gamma_{\mathcal{I}}(\zeta_{\mathcal{I}}, \bar{x})| \leq \delta_{\mathcal{I}}(|\zeta_{\mathcal{I}}|), \quad \forall \bar{x} \in \bar{X}. \quad (256)$$

In addition, using the discretisation error bounds in (242) and the bounds on the measurement noises described in Definitions 5 and 6, we have that the disturbance signal  $w_{\mathcal{I}}$  defined in (254) can be bounded, for  $k = 0, 1, \dots$ , as

$$|w_{\mathcal{I}}(k)| \leq \bar{w}_{\mathcal{I}} \triangleq [\bar{w}^T \dots \bar{\eta}_i^T \dots]^T. \quad (257)$$

We are now ready to use Theorem 11 to construct an invariant set for the augmented system (252)–(254).

**Proposition 3.** *Let  $A_{\mathcal{I}} = V_{\mathcal{I}}\Lambda_{\mathcal{I}}V_{\mathcal{I}}^{-1}$  be a Jordan decomposition of  $A_{\mathcal{I}}$  defined in (253) and suppose the map  $T_{\mathcal{I}} : \mathbb{R}_{+,0}^{(N+1)n} \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}^{(N+1)n}$  defined as  $T_{\mathcal{I}}(\zeta) = |A_{\mathcal{I}}|\zeta + |V_{\mathcal{I}}^{-1}|\delta_{\mathcal{I}}(|V_{\mathcal{I}}|\zeta) + |V_{\mathcal{I}}^{-1}E_{\mathcal{I}}|\bar{w}_{\mathcal{I}}$ , with  $E_{\mathcal{I}}$  defined in (254) and  $\delta_{\mathcal{I}}, \bar{w}_{\mathcal{I}}$  defined in Remark 12, has a fix point  $b_{\mathcal{I}}$ . Then the set*

$$S_{\mathcal{I}} = \{\zeta_{\mathcal{I}} : |V_{\mathcal{I}}^{-1}\zeta_{\mathcal{I}}| \leq b_{\mathcal{I}}\} \quad (258)$$

*is invariant with respect to the switching control law  $v = -K\hat{z}_l, l \in \mathcal{I}$ .*

Note that the augmented state  $\zeta_{\mathcal{I}}$  defined in (251) is not directly measurable. The information available is in fact related to the estimated tracking error corresponding to each sensor, which, using (246), (244) and  $v = -K\hat{z}_l$ , satisfies :

$$\begin{aligned}\hat{z}_i^+ &= A\hat{z}_i - BK\hat{z}_l + L_i(C_i z + \eta_i - C_i \hat{z}_i) \\ &= (A - L_i C_i)\hat{z}_i - BKz + BK\hat{z}_l + L_i C_i z + L_i \eta_i \\ &= (A - L_i C_i)\hat{z}_i - (BK - L_i C_i)z + BK\hat{z}_l + L_i \eta_i.\end{aligned}\quad (259)$$

Using ultimate bounds for  $\zeta_{\mathcal{I}}$  obtained from (258), individual invariant sets  $\hat{S}_i$  can be obtained for (259) by means of, for example, the results in [252]. We will employ here an alternative geometrical construction which exploits the description of the invariant set  $S_{\mathcal{I}}$  in the augmented space :

$$\hat{S}_i = \{\hat{z}_i : \exists \zeta_{\mathcal{I}} \in S_{\mathcal{I}} \text{ s.t. } \hat{z}_i = z - \tilde{z}_i\} = \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \dots 0 \\ \hline \underbrace{1, \dots, i-1} & \underbrace{0 \dots 0}_{i+1, \dots, N} \end{array} \right] S_{\mathcal{I}}. \quad (260)$$

At a fault appearance in the  $j$ th sensor, using (246), (245) and  $v = -K\hat{z}_l$  we have that the estimated tracking error will be driven by the equation

$$(\hat{z}_j^F)^+ = (A - L_j C_j)\hat{z}_j^F - BK\hat{z}_l + L_j \eta_j^F - L_j C_j \bar{x}. \quad (261)$$

Assuming that at the time of the fault the initial state  $\hat{z}_j^F$  is in the set (260), the set characterisation of the first step of (261) is

$$\hat{S}_j^F = (A - L_j C_j)\hat{S}_j \oplus (-L_j C_j)\bar{X} \oplus (-BK)\hat{S}_l \oplus L_j \Pi_j^F, \quad (262)$$

with  $\Pi_j = \{|\eta_j| \leq \bar{\eta}_j^F\}$ .

With these elements we are ready to treat the appearance of a fault.

**Theorem 12.** *Consider the multisensor scheme described in Sections 2 and 3 and the associated sets  $S_{\mathcal{I}}$ ,  $\hat{S}_i$  and  $\hat{S}_i^F$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , defined in (258), (260) and (262), respectively. Suppose  $\hat{S}_i \cap \hat{S}_i^F = \emptyset$  for all  $i \in \mathcal{I}$  and let the initial augmented state  $\zeta_{\mathcal{I}}(0)$  in (252) satisfy  $\zeta_{\mathcal{I}}(0) \in S_{\mathcal{I}}$ . If there exists at least one sensor which is healthy at all future instants, then there exists a control law that enables detection of sensor faults (as per Definition 6) and preserves the invariance of the sets  $\hat{S}_i$  corresponding to the sensors that remain healthy (as per Definition 5).*

**Proof :** Let the set  $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$  be split in two disjoint sets  $\mathcal{I} = \mathcal{H}(k) \cup \mathcal{F}(k)$  corresponding to indices of healthy and faulty sensors, respectively, at each sampling time  $k > 0$ . Since the multisensor scheme is initialised with  $\zeta_{\mathcal{I}}(0) \in S_{\mathcal{I}}$  then  $\mathcal{H}(0) = \mathcal{I}$ . At each  $k > 0$ , by applying the control law  $v(k) = -K\hat{z}_l(k)$ ,  $l \in \mathcal{H}(k)$ , then there exist “fictitious” values for  $\tilde{z}_j(k)$ ,  $\forall j \in \mathcal{F}(k)$  (e.g.  $\tilde{z}_j(k) = 0$ ) such that the extended vector  $\zeta_{\mathcal{I}}(k+1) \in S_{\mathcal{I}}$ . Recalling the definition (260) of the “healthy sets”  $\hat{S}_i$ , their positive invariance is guaranteed  $\forall i \in \mathcal{H}(k) \cap \mathcal{H}(k+1)$  (that is, for those sensors that remain healthy at time  $k+1$ ). Having proved the positive invariance of the healthy sets, fault detection is then immediate by using the property that  $\hat{S}_j$  and  $\hat{S}_j^F$  are disjoint. Indeed, the detection mechanism has to

update the set  $\mathcal{F}(k+1) = \mathcal{F}(k) \cup \{j\}$  for all indices  $j$  which satisfy  $\hat{z}_j(k+1) \in \hat{S}_j^F$ . Finally,  $\mathcal{H}(k+1) = \mathcal{I} \setminus \mathcal{F}(k+1)$  and the proof is complete. ■

It should be noted that the hypothesis that  $\zeta_{\mathcal{I}}(0) \in S_{\mathcal{I}}$  (which implies  $\mathcal{H}(0) = \mathcal{I}$ ) is not restrictive, any combination  $\mathcal{I} = \mathcal{H}(0) \cup \mathcal{F}(0)$  with  $\mathcal{H}(0) \neq \emptyset$  being possible as initial configuration. Moreover, if the initial inclusion is not verified, the selection of healthy sensors for control assures the convergence of  $\zeta_{\mathcal{I}}$  towards  $S_{\mathcal{I}}$  in finite time as deduced from (248).

## IV-9 Reconfiguration and receding horizon control

The optimisation-based control proposed uses the receding horizon principle to obtain the control action in the form  $u(k) = \bar{u}(k) + v^*(k)$ . In order to achieve fault tolerance guarantees, it is supposed that prior to solving an open-loop optimal control problem, the set of healthy sensors is updated using :

**Reconfiguration procedure**

A  $\mathcal{F}(k+1) = \mathcal{F}(k)$

B for  $j \in \mathcal{H}(k)$

(a) if  $\hat{z}_j(k+1) \in \hat{S}_j^F$  then  $\mathcal{F}(k+1) = \mathcal{F}(k) \cup \{j\}$

C  $\mathcal{H}(k+1) = \mathcal{I} \setminus \mathcal{F}(k+1)$

Taking into account that the structure of the optimisation problem depends on the set  $\mathcal{H}$ , one can interpret this diagnosis phase as a reconfiguration procedure for the receding horizon control problem as indicated in Figure IV-7.

We employ the following “classical ingredients” [232] for the receding horizon optimisation :

- a cost per stage :  $l(z, v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- a terminal cost :  $\phi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- the prediction horizon  $H_p$

Knowing the fact that  $u = \bar{u} - K\hat{z}_l$  for some  $l \in \mathcal{H}$  preserves the invariance of  $\hat{S}_i$  for all  $i \in \mathcal{H}$  and, hence, the fault tolerance guarantees (see Theorem 12), we present three possible constructions for the open-loop optimal control problem that satisfy this structural constraint :

- “Individual merit” selection. Here the sensors are compared with respect to their individual cost-to-go for the given initial conditions :

$$\begin{aligned}
 u(k) &= \bar{u}(k) - K\hat{z}_{i^*} \\
 i^* &= \arg \min_i \left\{ \phi(\hat{z}_i(k + H_p)) + \sum_{j=0}^{H_p-1} l(\hat{z}_i(k+j), -K\hat{z}_i(k+j)) \right\} \\
 \text{subj. to } & \hat{z}_i(k+j+1) = G(\hat{z}_i(k+j), \bar{x}(k+j)) - BK\hat{z}_i(k+j) \\
 & \quad \forall j \in \{0, \dots, H_p-1\}, \forall i \in \mathcal{I}_H
 \end{aligned} \tag{263}$$



- “Relay race”. Here switchings are allowed along the prediction horizon between the estimators which build the control action :

$$\begin{aligned}
u(k) = \bar{u}(k) - K\hat{z}_{i_0^*} \\
\left\{ i_0^*, \dots, i_{H_p-1}^* \right\} &= \arg \min_{\{i_0, \dots, i_{H_p-1}\}} \left\{ \phi(\hat{z}_{i_{H_p-1}}(k + H_p)) + \right. \\
&\quad \left. \sum_{j=0}^{H_p-1} l(\hat{z}_{i_j}(k + j), -K\hat{z}_{i_j}(k + j)) \right\} \\
\text{subj. to } \hat{z}_i(k + j + 1) &= G(\hat{z}_i(k + j), \bar{x}(k + j)) - BK\hat{z}_{i_j}(k + j) \\
&\quad \forall j \in \{0, \dots, H_p - 1\}, \forall i \in \mathcal{I}_H
\end{aligned} \tag{264}$$

- “Collaborative” scenario. Here the cost index allows switching during the prediction horizon and the terminal penalty is considered with respect to a combination of predicted estimation errors :

$$\begin{aligned}
u(k) = \bar{u}(k) - K\hat{z}_{i_0^*} \\
\left\{ i_0^*, \dots, i_{H_p-1}^* \right\} &= \arg \min_{\{i_0, \dots, i_{H_p-1}\}} \left\{ \phi(\hat{z}(k + H_p)) + \right. \\
&\quad \left. \sum_{j=0}^{H_p-1} l(\hat{z}_{i_j}(k + j), -K\hat{z}_{i_j}(k + j)) \right\} \\
\text{subj. to } \hat{z}_i(k + j + 1) &= G(\hat{z}_i(k + j), \bar{x}(k + j)) - BK\hat{z}_{i_j}(k + j) \\
&\quad \forall j \in \{0, \dots, H_p - 1\}, \forall i \in \mathcal{I}_H \\
\hat{z}(k + H_p) &= \frac{1}{\text{card}(\mathcal{H})} \sum_{i \in \mathcal{H}} \hat{z}_i(i + H_p)
\end{aligned} \tag{265}$$

Notice that the decision based on individual cost evaluation does not exploit the degrees of freedom offered by the prediction window. It can be reduced in fact to the comparison of cost indices for different estimations. The advantage of such a scheme lies in the simplicity of its implementation. On the other hand, the second and third schemes propose optimisation problems which belong to the class of MINL (mixed integer nonlinear) problems and the combinatorial complexity of their discrete decisions grows with the prediction horizon.

## ***Partie V : Perspectives***

### **V-1 Perspectives à court terme**

Les projets à court terme sont liés aux thèses (co)encadrées à présent et dont la soutenance est prévue dans les trois ans prochains. En général, ces travaux sont entamés et il existe des résultats préliminaires.

#### **V-1.1 Commande prédictive des systèmes à retard**

La thèse en cours de W. Lombardi (débutée en juillet 2008 et dont je suis le directeur de thèse par dérogation du CS Paris XI) s'intéresse à :

- La définition et la caractérisation de l'invariance positive pour des systèmes linéaires en temps discret affectés par retard.
- La caractérisation des conditions nécessaires et suffisantes d'invariance pour ces systèmes en généralisant les résultats du cas linéaire [154].
- La construction effective par des interactions sur les ensembles convexes (polyèdres) des ensembles invariants positifs par rapport aux dynamiques affectées par retard.
- La comparaison des différentes méthodes de construction d'approximations polytopiques pour les systèmes linéaires affectés par retard et l'adaptation de ces modèles à la synthèse robuste.
- L'utilisation de ces modèles de prédiction et des ensembles invariants pour des systèmes à retard afin de définir une stratégie de commande prédictive en présence des contraintes (entrée + état) avec des garanties de stabilité (voir le problème indirect de faisabilité récursive)
- L'adaptation des constructions de type Lyapunov-Krasovskii et Lyapunov-Razumikhin pour assurer que l'optimisation d'un critère de coût sur un horizon glissant conduit indirectement à des preuves de stabilité.
- L'application de la commande prédictive pour la commande en réseaux d'un système d'asservissement de position.

#### **V-1.2 Commande tolérante aux défauts des systèmes multi-capteurs**

La thèse en cours de F. Stoican (débutée en Octobre 2008) a parmi les objectifs immédiats :

- La construction des ensembles invariants positifs de type *zonotope* (pour contrôler la complexité)
- Redéfinir la problématique de la commande tolérante aux défauts dans le cadre de la théorie de la viabilité. Les techniques liées à la théorie de la viabilité sont attirantes pour nos objectifs puisqu'elles sont de nature géométrique et présentent un outil approprié aussi longtemps qu'aucune

propriété de continuité n'est exigée. Elles traitent non seulement du comportement asymptotique, mais également des évolutions transitoires et de la capturabilité des cibles dans un temps fini ou prescrit (un aspect utile dans notre description des tubes des transitions). La théorie de la viabilité incorpore une description mathématique de l'incertitude sans régularité statistique, traite non seulement de l'optimalité, mais également de la faisabilité et de la prise de décision au moment opportun, un fait qui est encore en concordance avec nos objectifs.

- La commande basée sur le principe de l'horizon glissant sera utilisée pour la réconfiguration des systèmes multi-capteurs. Par sa construction temporelle, elle incorporera les contraintes sur la trajectoire d'évolution et les problèmes d'optimisation multi-objectifs. Un avantage important des méthodes de commande à horizon glissant est le fait qu'elles sont décrites dans le temps discret, et il est connu que la caractérisation tangentielle des noyaux de viabilité et des bassins de capture est beaucoup plus simple à décrire en temps discret que dans le cas continu.
- L'extension des résultats de détection et d'isolation à base de méthodes ensemblistes pour le cas des défauts des actionneurs est envisagé pour compléter le module de diagnostique
- L'application des techniques pour la détection des pannes pour un système de production d'énergie éolienne
- L'application des résultats obtenus dans le cadre des travaux sur l'assistance active pour l'évitement des sorties involontaires de la voie de circulation [155] (comparaison entre l'approche basée sur les ensembles ellipsoïdaux et polyédraux).

### V-1.3 Commande collaborative en présence de contraintes de communication

La thèse de I. Prodan (débutée en Octobre 2009) se propose d'étudier les interconnexions des composants des systèmes dynamiques complexes (en particulier, ceux commandés par un réseau de communication) afin de prendre en compte le comportement des systèmes naturels ou artificiels face aux contraintes physiques (dites de viabilité). Les outils qui permettront la réalisation de ces objectifs et qui seront utilisés dans le cadre de ce projet sont la commande optimale et prédictive sous contraintes de communication avec une attention particulière pour la prise en compte des limitations de l'énergie disponible pour la commande, de la saturation de la commande et/ou de l'existence de contraintes dures sur l'état du système global.

L'intérêt porté dernièrement à la "commande des systèmes en réseau" a montré que la quantification des signaux est un élément essentiel, qui conditionne la capacité de transmission des canaux de communication dans une boucle de régulation. Les effets sur la bande passante doivent également être parfaitement maîtrisés pour garantir la stabilité et les performances de la boucle fermée. En effet, suite à des contraintes physiques, liées à la transmission, il est possible dans une commande en réseau, que la valeur quantifiée transmise à l'actionneur

soit différente de celle destinée aux autres membres de la structure collaborative. Une étude plus approfondie s'impose, afin de pouvoir implémenter une loi de commande qui garantit les propriétés initiales de robustesse en stabilité et performance. En présence de contraintes dures sur les trajectoires admissibles, la viabilité du système coopératif devient primordiale et le compromis classique performance/robustesse se décline alors sous la forme du triptyque faisabilité/coordination/reconfiguration.

Pour répondre à ce type de questions, des travaux existent et ont été revisités récemment à propos de la synthèse de lois de commande coopérative, en présence de contraintes de communication. Concernant la quantification, peu de chose a été fait pour la prise en compte des contraintes de fonctionnement, dans la phase de conception de la commande. Dans ce contexte, le fonctionnement des systèmes coopératifs est implicitement associé au concept dit du "consensus", qui permet d'établir un compromis entre les objectifs des différents sous-systèmes et du système global, avant l'application de la loi de commande.

Concernant la partie théorique du travail futur, les pistes privilégiées portent sur :

- La description des domaines de viabilité pour les systèmes dynamiques sous contraintes, par des polyèdres paramétrés et dans leur version quantifiée par "le polynôme d'Ehrhart d'un polyèdre à sommets entiers"
- La prise en compte de ces résultats pour la synthèse d'une commande à horizon glissant de systèmes en réseau ;
- La réalisation de lois de commande robuste face à des incertitudes de modèle et des perturbations générées par la quantification ;
- L'étude des systèmes décentralisés et des problèmes de "consensus", avec une attention particulière pour les implications des graphes de connexions sur la stabilité ;
- L'analyse de la tolérance aux éventuels interruptions de communication

Les applications concernent les véhicules (autonomes ou non-autonomes) circulant en formation (par exemple avions, voitures ...) en exploitant leurs capacités extéro-perceptives comme c'est le cas de la voiture intelligente évoluant dans une infrastructure routière avec échange d'information renforcé (afin d'améliorer la sécurité routière et les performances, de diminuer les risques pour d'éventuelles collisions et de réduire les conséquences des collisions imminentes).

#### **V-1.4 Synthèse prédictive de lois de commande hybrides de type « patchy »**

Le travail de thèse de N. Nguyen (commencé en Octobre 2009) se concentre sur l'optimisation du fonctionnement de systèmes de plus en plus complexes en intégrant le caractère distribué des systèmes et l'interaction des dynamiques discrètes et continues (environnement analogique et dispositifs numériques). Par ailleurs, la maîtrise de ces systèmes complexes nécessite la synthèse de lois de commande simples et robustes, tenant compte des contraintes, de sorte que les propriétés du système commandé puissent être garanties en dépit d'incertitudes.

Or, les méthodes de synthèse de lois de commande robustes pour systèmes hybrides sont encore quasiment inexistantes.

Le travail proposé vise à l'élaboration de stratégies de commande prédictive robuste pour systèmes hybrides, intégrant une réduction de la complexité pour une implantation dans un environnement temps réel. Les pistes privilégiées seront :

- Description multi-modèle et synthèse de lois de commande locales de type "patchy" à partir de stratégies de commande prédictive à horizon glissant dans leurs formulations explicites ;
- Composition de lois de commande locales avec la dynamique du système non linéaire pour en déduire une loi de commande de type hybride et analyse des propriétés de stabilité et de robustesse globales ;
- Délocalisation d'une partie de la charge de calcul temps réel vers des procédures hors ligne (solution explicites), considérant également la problématique de faisabilité (aspect important pour la sûreté de fonctionnement) ;
- Allègement du conservatisme structurel des problèmes d'optimisation dans le cadre de la commande robuste pour les systèmes hybrides en privilégiant l'adaptation du modèle selon le degré de prédiction.

L'utilisation des développements les plus récents dans le domaine de la construction de solutions explicites par des techniques multiparamétriques, d'une part, la prise en compte d'outils performants tels que les Inégalités Matricielles Affines (LMI), d'autre part, seront des atouts fondamentaux pour cette construction.

### V-1.5 Commande prédictive MPC pour la télé-opération

La travail de thèse de B. Liacu (commencé en Octobre 2009) part de la constatation qu'une des structures généralement mises en place dans les systèmes de télé-opération est la structure maître-esclave. Elle comporte une station maître, dans laquelle divers retours d'informations (le retour d'effort par exemple) permettent à un opérateur humain de commander, piloter ou surveiller un robot manipulateur distant, et une station esclave au niveau de laquelle oeuvre le robot sur un environnement extérieur. Les échanges d'information entre les deux sites distants concernant le contrôle des robots et le retour d'effort s'effectuent à travers un moyen de communication qui induit irrémédiablement des retards de transmission et des contraintes dynamiques (variables par intervalles ou positives). Ces contraintes engendrent de fortes dégradations des performances voire déstabilisent la chaîne de téléopération bilatérale. En particulier, la présence des retards ne peut pas être négligée. De ce fait, il est nécessaire de prendre en compte ce retard et de traiter l'information correctement, notamment lors de la synthèse des stratégies de commande pour améliorer le comportement dynamique des systèmes considérés

Hormis ces problèmes de stabilité, le schéma de commande doit apporter à l'opérateur une certaine transparence en force et en position, afin de lui donner la sensation de ce que réalise l'opérateur esclave distant. Cette transparence est un autre défi des systèmes de télé-opération bilatérale. Malheureusement, ces deux objectifs (la stabilité robuste et la transparence) s'opposent mutuellement.

De façon générale, les stratégies de commande existantes sont centrées soit sur la stabilité, soit sur la transparence et non sur un compromis des deux. Un des objectifs de ce travail est de définir une stratégie permettant de concilier ces deux aspects en faisant appel à des éléments de commande prédictive pour utiliser toute l'information disponible concernant les modèles et l'environnement lors du calcul de l'action corrective.

### **V-1.6 Tolérance aux défauts introduits par le retard dans les systèmes dynamiques**

La thèse de N. Stankovic qui commence à la fin de l'année 2010 vise à rapprocher les résultats de modélisation des systèmes affectés par retard variable avec les avancées dans la détection et l'identification des défauts. Dans cette optique, les retards de transmission peuvent être classés comme suit :

- pour des faibles variations autour d'une valeur supposée comme valeur nominale ils peuvent être traités en tant qu'incertitudes paramétriques
- pour des variations importantes, ils sont signalés comme défauts et une reconfiguration de la structure de communication est mise en place.

Les challenges seront liés aux problèmes classiques d'estimation de retard dans un système dynamique et feront intervenir les concepts d'invariance et de commande/estimation à horizon glissant.

## **V-2 Perspectives à moyen terme**

Voici une liste de problèmes bien identifiés mais qui ne font pas partie d'un projet de recherche concrétisé par une thèse en déroulement :

- La construction des solutions explicites pour les problèmes de commande prédictive avec contraintes non-convexes de type "excitation persistante" ou "zone de sécurité autour du point d'équilibre". Cette problématique implique aussi au niveau de la commande prédictive (ou commande optimale) la caractérisation de la stabilité en fonction de la nouvelle famille des points fixes ou des cycles limites.
- La conjugaison de la planification de trajectoire à base de description des systèmes plats et le suivi de trajectoire en temps réel autour de cette trajectoire à l'aide de la commande prédictive.
- La recherche des fonctions de coût (et accessoirement les fonctions candidates de Lyapunov) auto-ajustables par décalage dans une fenêtre temporelle (qui se rapproche au niveau conceptuel avec la convergence graphique) aura des applications dans la commande des systèmes avec retard et la commande des systèmes hybrides avec contraintes d'impact.
- En partant de la constatation que les systèmes peuvent être stabilisés par un régulateur de type "proportionnel+retard(s)" on se propose d'étudier la commande prédictive basée sur l'information retardée
- Dans l'étude de stabilité des réseaux d'oscillateurs synchronisés (qui représente une alternative à la distribution arborescente du signal d'horloge) dans les

”systèmes synchrones à grande échelle sur puces” (*large-scale synchronous systems-on-chips*), les procédures de type Lyapunov peuvent être associées à une étude géométrique de la propagation des régions du modèle PWA pour réduire le conservatisme des résultats obtenus en [156] à base de LMI.

- Une piste intéressante pour l’application de la commande prédictive sera le véhicule avec un dispositif *steer-by-wire*, pour la suspension active ou pour la commande des éoliennes. Une loi de commande explicite peut être envisagée en partant d’un modèle PWA construit par rapport à une approximation des non-linéarités caractérisant les forces extérieures.

La proposition de trois sujets de thèse est envisagée, pour leur financement trois voies étant privilégiées : la participation dans un consortium qui proposera au niveau européen un projet ITN-FP7 en janvier 2011 ; le dépôt d’un projet ANR ainsi que la soumission d’un projet pour le financement au niveau post-doctoral par le biais de la Fondation Supélec.

## V-3 Perspectives à long terme

### V-3.1 Commande prédictive coopérative

La conception des systèmes dynamiques dits coopératifs a attiré l’attention des chercheurs ces dernières années et trouve maintenant de nombreuses applications dans le domaine du transport, de la maîtrise et de la génération d’énergie, de la biologie, des sciences sociales. Dans ce contexte, la finalité des lois de commande classiques (suivi de référence, rejet de perturbation) devient un objectif précis non seulement pour chaque sous-composant pris individuellement, mais aussi pour le système dans son intégralité, vu comme l’interconnexion de tous les sous-systèmes (communément appelés ”agents”). En outre, des difficultés supplémentaires peuvent apparaître, liées aux fonctionnalités des boucles de commande classiques (capteurs, actionneurs, correcteurs) qui partagent un réseau de communication. On identifie donc un défi conceptuel lié aux contraintes de communications dans les systèmes multi-agents.

Des recherches récentes ont permis de jeter les bases nécessaires à la théorie dit du ”consensus” dans une structure coopérative. L’échange d’information (notamment la structure du réseau de communication) représente un élément clé de l’analyse de stabilité dans ce cas. En ajoutant des informations qualitatives sur les graphes de connexion entre les sous-systèmes, une estimation de la vitesse de convergence vers le ”consensus” peut être réalisée.

Une des directions de recherche à long terme aura pour but la synthèse de lois de commande répondant aux besoins dus à l’association de contraintes de fonctionnement d’une formation de systèmes dynamiques, avec la notion de ”consensus”, en liaison avec la viabilité (la satisfaction des contraintes de survie de façon récursive en présence des perturbations et des contre-actions des agents hostiles). Ce sujet suscite actuellement un intérêt grandissant et, en effet, plusieurs applications ont été déjà explorées. Parmi les plus récentes on peut citer la robotique et la télé-opération dans un milieu hostile, la gestion des réseaux d’énergie (Smart-Grid) ou la sécurité nucléaire.

### V-3.2 Commande prédictive distribuée

L'idée de base dans la commande prédictive distribuée est d'utiliser de façon itérative les solutions des problèmes d'optimisation décomposés provenant du Lagrangien d'un problème d'optimisation globale pour des systèmes interconnectés. Plusieurs méthodes de décomposition ont été étudiées dans la littérature en utilisant les avancées de la théorie d'optimisation (voir [157]). On mentionne les travaux [158] qui montrent les directions possibles dans la décomposition basée sur la dualité et les techniques de type *smoothing*. Dans ce cas, la méthode utilise le plus proche centre et les méthodes de type point intérieur pour exploiter la résolution distribuée des problèmes convexes séparables. Les problèmes beaucoup plus compliqués sont à résoudre pour le cas où la convexité du domaine faisable est perdue. La commande prédictive distribuée pour les systèmes représentés par plusieurs sous-systèmes non-linéaires déconnectés au niveau de l'état mais couplés par des fonctions de coût globales a été étudiée en [159]. En [160] le couplage est considéré au niveau de la fonction de coût et des contraintes statiques.

L'application des résultats existants pour des applications de type "power grid" ou multiagent (véhicule, flux de population) a de l'avenir car les approches distribuées peuvent profiter par leur capacité de parallélisation à l'implémentation de la commande prédictive pour des systèmes complexes de type optimisation de l'énergie dans les bâtiments où l'information locale et la coordination entre les lois de commande locales peut se faire par l'intermédiaire de multiplicateurs de Lagrange correspondants aux dynamiques couplées ou aux contraintes.

### V-3.3 Commande prédictive non-linéaire

La connexion entre la commande prédictive et la commande optimale a fait couler beaucoup d'encre et va rester un domaine actif car la stabilité de la commande prédictive revient souvent aux origines de la commande optimale et à la programmation dynamique. Spécifiquement pour la synthèse et l'étude de stabilité de la commande prédictive sans contraintes terminales et leur analyse de performances (perte de performances par rapport au cas d'horizon de prédiction infini) une procédure efficiente a besoin d'une estimation des constantes  $C$  et  $\gamma$  (assimilées au dépassement et respectivement au facteur de convergence) telles que le critère de coût satisfait :

$$V^*(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} C\gamma^k$$

L'estimation de ces paramètres reste néanmoins un problème compliqué car lié aux caractéristiques de contrôlabilité des systèmes non-linéaires.

Dans le cas des modèles non-linéaires avec retard, il est connu que la stabilité sera liée à la construction des ensembles invariants positifs à l'aide de la commande pour les systèmes à retard. L'existence d'une linéarisation de Jacobi stabilisable implique l'existence d'une fonction de coût terminale quadratique



et d'une région terminale ellipsoïdale utilisable pour la synthèse prédictive. Ces contraintes terminales ne peuvent pas être définies comme des ensembles de niveau constant de coût dans le cas des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii (car la dimension est infinie) mais peuvent l'être dans un espace de dimension finie dans le cas des fonctions de Lyapunov-Razumikhin, le prix à payer étant un certain conservatisme (il est connu que même si le système est stabilisable il est possible de ne pas avoir une fonction de Lyapunov-Razumikhin associée). Ces ensembles peuvent être trouvés en utilisant les arguments de type Lyapunov-Krasovskii ou Lyapunov-Razumikhin pour le cas des systèmes avec retard dans l'état mais pour le cas des systèmes avec des entrées retardées le problème reste ouvert.

### V-3.4 Systèmes monotones

La théorie des systèmes monotones est consacrée aux équations différentielles non linéaires ordinaires. Le principal intérêt de cette théorie peut être brièvement décrit comme suit : pour les diverses relations d'ordre partiel, il est possible de discriminer les systèmes qui admettent des solutions qui répondent à l'ordre partiel pour tous les temps positifs si la condition initiale satisfait à l'ordre partiel. En particulier les systèmes coopératifs sont des systèmes monotones tels que, si une solution a un état initial composante par composante plus petite que la condition initiale d'une autre solution, alors la première solution reste inférieure composante par composante à la seconde pour tous les temps positifs. Une introduction à la théorie des systèmes monotones est donnée en [161]. Dans la modélisation et l'analyse des systèmes contemporains, les ingénieurs et les chercheurs sont souvent confrontés à des systèmes de plus en plus complexes qui peuvent ne pas être de dimension finie et continue. Par conséquent, une limitation de la théorie des systèmes monotones vient du fait qu'elle est contrainte à des équations différentielles ordinaires. De façon surprenante, il y a peu de résultats dédiés à l'extension de la théorie des systèmes monotones pour les systèmes avec retard.

Notamment, l'extension des résultats obtenus pour les systèmes à retard aux systèmes NCS (Networked Control Systems) présente un grand intérêt. On peut partir de l'hypothèse que des sous-systèmes NCS possèdent la propriété d'être monotones (ou présentent des propriétés de coopération) et mettre l'accent sur l'enjeu de l'invariance positive : en effet, la théorie des systèmes monotones nous permet d'aller plus loin que la construction des solutions positives : elle peut être utilisée pour obtenir des résultats plus profonds d'invariance. Cette étude pourrait commencer par la recherche des conditions garantissant l'invariance de polyèdres pour les systèmes linéaires continus avec un retard. Les résultats d'invariance seront ensuite utilisés pour la conception de lois de commande prédictives qui peuvent exploiter les conditions d'invariance lors de l'étape d'optimisation temps réel.

## Bibliographie

1. R. Haber, R. Bars and U. Schmitz, "Predictive Control in Process Engineering", Wiley VCH, 2008.
2. "Rapport du comité des experts automatique du CNRS. Prospectives de recherche." 20 Avril 2006.
3. P. Albertos and I. Mareels, *Feedback and Control for Everyone*. Springer, 2010.
4. S. Skogestad, "Feedback : Still the Simplest and Best Solution," *Modeling, Identification and Control*, vol. 30, no. 3, pp. 149–155, 2009.
5. J. LaSalle, "The stability and control of discrete processes, volume 62 of Applied Mathematical Sciences," 1986.
6. A. Halanay and V. Răşvan, *Stability and stable oscillations in discrete time systems*. CRC, 2000.
7. V. Rasvan, *Contributii la dezvoltarea automatizării neliniare*. Craiova : Editura Universitaria Craiova, 2005.
8. J. Richalet, *Pratique de la commande prédictive*. Paris : Hermes, 1993.
9. W. Kwon and S. Han, *Receding Horizon Control : Model Predictive Control for State Models*, 1st ed. London : Springer-Verlag, 2005.
10. D. Dumur and P. Boucher, *La Commande Prédictive*. Edition Hermès, 2006.
11. R. Soeterboek, *Predictive control : a unified approach*. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA, 1992.
12. P. Boucher and D. Dumur, *La commande prédictive*. Paris : Technip, 1996.
13. K. Y. Rani and H. Unbehauen, "Study of predictive controller tuning methods," *Automatica*, vol. 33, no. 12, pp. 2243 – 2248, 1997.
14. R. Bitmead, M. Gevers, and V. Wertz, *Adaptive optimal control : The thinking man's GPC*. Prentice Hall International, 1990.
15. E. Mosca, *Optimal Predictive and Adaptive Control*. Prentice Hall, 1995.
16. M. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities," *Automatica*, vol. 32, no. 10, pp. 1361–1379, 1996.
17. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, USA, 1994.
18. R. Kalman and J. Bertram, "Control system analysis and design via the second method of lyapunov : (I) continuous-time systems (II) discrete time systems," *Automatic Control, IRE Transactions on*, vol. 4, no. 3, pp. 112–112, 1959.
19. S. Keerthi and E. Gilbert, "Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems : Stability and moving-horizon approximations," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 57, no. 2, pp. 265–293, 1988.
20. M. Alamir and G. Bornard, "On the stability of receding horizon control of nonlinear discrete-time systems," *Systems & Control Letters*, vol. 23, no. 4, pp. 291–296, 1994.
21. E. Meadows, M. Henson, J. Eaton, and J. Rawlings, "Receding horizon control and discontinuous state feedback stabilization," *International Journal of Control*, vol. 62, no. 5, pp. 1217–1229, 1995.

22. P. Scokaert, J. Rawlings, and E. Meadows, "Discrete-time stability with perturbations : application to model predictive control," *Automatica*, vol. 33, no. 3, pp. 463–470, 1997.
23. P. Scokaert, D. Mayne, and J. Rawlings, "Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability)," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 3, pp. 648–654, 1999.
24. G. Grimm, M. Messina, S. Tuna, and A. Teel, "Examples when nonlinear model predictive control is nonrobust," *Automatica*, vol. 40, no. 10, pp. 1729–1738, 2004.
25. L. Magni and R. Scattolini, "Robustness and robust design of MPC for nonlinear discrete-time systems," *Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*, pp. 239–254, 2007.
26. D. Limon, T. Alamo, F. Salas, and E. Camacho, "Input to state stability of min-max MPC controllers for nonlinear systems with bounded uncertainties," *Automatica*, vol. 42, no. 5, pp. 797–803, 2006.
27. S. Raković, "Set theoretic methods in model predictive control," *Nonlinear Model Predictive Control*, pp. 41–54, 2009.
28. F. Blanchini, "Set invariance in control," *Automatica*, vol. 35, pp. 1747–1467, 1999.
29. G. Goodwin, M. Seron, and J. D. Dona, *Constrained Control and Estimation*. Berlin : Springer-Verlag, 2004.
30. D. Mayne, J. Rawlings, C. Rao, and P. Scokaert, "Constrained model predictive control : Stability and optimality," *Automatica*, vol. 36, pp. 789–814, 2000.
31. F. Blanchini and S. Miani, *Set-theoretic Methods In Control*. Boston : Birkhauser, 2006.
32. J. Rawlings and D. Mayne, "Model predictive control : Theory and design," *Nob Hill Publications*, 2009.
33. D. Bertsekas and I. Rhodes, "On the minimax reachability of target sets and target tubes," *Automatica*, vol. 7, no. 2, pp. 233–247, 1971.
34. J. Aubin and H. Frankowska, *Set-valued analysis*. Birkhauser, 2008.
35. J. Aubin, *Viability theory*. Birkhauser, 1991.
36. E. Kerrigan and D. Mayne, "Optimal control of constrained, piecewise affine systems with bounded disturbances," in *IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 2, 2002, pp. 1552–1557.
37. P. Grieder, M. Kvasnica, M. Baotic, and M. Morari, "Stabilizing low complexity feedback control of constrained piecewise affine systems," *Automatica*, vol. 41, no. 10, pp. 1683–1694, 2005.
38. H. Michalska and D. Mayne, "Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 11, pp. 1623–1633, 1993.
39. H. Chen and F. Allgöwer, "A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability," *Automatica*, vol. 34, no. 10, pp. 1205–1217, 1998.
40. M. Lazar, *Model predictive control of hybrid systems : Stability and Robustness*. Eindhoven : TUE, 2006.

41. S. Rakovic, A. R. Teel, D. Q. Mayne, and A. Astolfi, "An overview of industrial model predictive control technology," in *Proceedings of the 45th Conference on Decision and Control*, vol. 93, 2006, pp. 232–256.
42. S. Rakovic, "Set theoretic methods in model predictive control," *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 384, pp. 546 – 561, 2009.
43. R. Bitmead, M. Gevers, and W. V., *Adaptive optimal control : The thinking man's GPC*. Prentice Hall International, 1990.
44. S. J. Qin and T. A. Badgwell, "A survey of industrial model predictive control technology," *Control Engineering Practice*, vol. 11, no. 7, pp. 733–764, July 2003.
45. E. F. Camacho and C. A. Bordons, *Model predictive control in the process industry*. Springer-Verlag New York, Inc. Secaucus, NJ, USA, 1997.
46. E. Camacho and C. Bordons, *Model Predictive Control*. Springer-Verlag, 2003.
47. D. Clarke, C. Mohtadi, and P. Tuffs, "Generalized predictive control - part i and ii," *Automatica*, vol. 23(2), pp. 137–160, 1987.
48. J. Rossiter, *Model-Based Predictive Control*. CRC-Press, 2003.
49. J. M. Maciejowski, *Predictive control with constraints*. Prentice Hall, 2002.
50. E. Mosca, *Optimal Adaptive and Predictive Control*. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall, 1995.
51. J. Richalet and D. O'Donovan, *Predictive functional control*. Springer, 2009.
52. J. Richalet, A. Rault, J. Testud, and J. Papon, "Model predictive heuristic control : Applications to industrial processes," *Automatica*, vol. 14, no. 5, pp. 413–428, 1978.
53. B. Kouvaritakis and M. Cannon, *Nonlinear Predictive control : theory and practice*. IET, 2001.
54. R. Findeisen, L. Imsland, F. Allgower, and B. Foss, "State and output feedback nonlinear model predictive control : An overview," *European Journal of Control*, vol. 9, no. 2-3, pp. 190–206, 2003.
55. M. Alami, *Stabilization of nonlinear systems using receding-horizon control schemes : a parametrized approach for fast systems*. Springer Verlag, 2006.
56. F. Allgower and A. Zheng, *Nonlinear Model Predictive Control : Assessment and Future Directions for Research*. Basel : Birkhäuser, Progress in Systems and Control Series, 2004.
57. R. Findeisen, F. Allgower, and L. Biegler, *Assessment and future directions of nonlinear model predictive control*. Springer, 2007.
58. L. Magni, D. Raimundo, and F. Allgower, *Model Predictive Control : Towards New Challenging Applications*. Springer, 2009.
59. M. Diehl, "Real-Time Optimization for Large Scale Nonlinear Processes, volume 920 of Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8, Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik," 2002.
60. R. Bartlett, L. Biegler, J. Backstrom, and V. Gopal, "Quadratic programming algorithms for large-scale model predictive control," *Journal of Process Control*, vol. 12, no. 7, pp. 775–795, 2002.
61. S. Olaru and D. Dumur, "A parameterized polyhedra approach for explicit constrained predictive control," in *Proceedings of 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, The Bahamas, Dec. 2004.

62. A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E. Pistikopoulos, "The explicit linear quadratic regulator for constrained systems\* 1," *Automatica*, vol. 38, no. 1, pp. 3–20, 2002.
63. P. Tøndel, T. Johansen, and A. Bemporad, "An algorithm for multi-parametric quadratic programming and explicit MPC solutions\* 1," *Automatica*, vol. 39, no. 3, pp. 489–497, 2003.
64. P. Tøndel and N. Trondheim, "Constrained Optimal Control via Multiparametric Quadratic Programming," *Doktorska disertacija, NTNU, Trondheim, Norveška*, 2003.
65. M. Seron, G. Goodwin, and J. Doná, "Characterisation of receding horizon control for constrained linear systems," *Asian Journal of Control*, vol. 5, no. 2, pp. 271–286, 2003.
66. J. De Dona, "Input constrained linear control," Ph.D. dissertation, Ph. D., Department of Electrical and Computer Engineering, The University of Newcastle, Australia, 2000.
67. J. Mare and J. De Dona, "Use of dynamic programming for the analytical solution of input-constrained lqr problems," in *Control Conference, 2004. 5th Asian*, vol. 1, 20–23 2004, pp. 442 – 448.
68. S. Olaru and D. Dumur, "Avoiding constraints redundancy in predictive control optimization routines." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50(9), pp. 1459–1466, 2005.
69. —, "Some Feasibility Issues Related to Constrained Generalized Predictive Control," in *1st International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics ICINCO*, vol. 4, pp. 25–28.
70. —, "Constrained model predictive control. Influence of redundancy in the set of constraints, possible amelioration," in *IMACS Conference*, 2005.
71. —, "Explicit constrained model predictive control. The influence of constraints redundancy." in *5th IEEE International Conference on Control and Automation, Budapest, Hongrie*, 2005.
72. —, "On constrained predictive control on-line optimization routines," in *IEEE Conf. Methods and Models in Automation and Robotics, Poland*, 2004.
73. —, "Feasibility of constrained generalized predictive control within invariant sets framework," in *Control Conference, 2004. 5th Asian*, 2004, pp. 922–930.
74. —, "Feasibility of constrained generalized predictive control within invariant sets framework," *Australian Journal of Electrical and Electronics Engineering*, vol. 2, no. 1, 2005.
75. —, "Compact explicit mpc with guarantee of feasibility for tracking," in *In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2005, pp. 969–974.
76. —, "A parameterized polyhedra approach for the explicit Robust Model Predictive Control," in *Informatics in Control, Automation and Robotics II*. Springer, pp. 217–226.
77. S. Olaru, D. Dumur, and S. Tebbani, "Parameterized polyhedra approach for robust constrained generalized predictive control," 2005, pp. 428–433.
78. S. Olaru, I. Dumitrache, and D. Dumur, "On the continuity of control laws based on multiparametric linear programming," in *13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation*, 2006.

79. S. Oлару and D. Dumur, "On the continuity and complexity of control laws based on multiparametric linear programs," in *2006 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006, pp. 5465–5470.
80. S. Oлару, D. Dumur, J. Thomas, and M. Zainea, "Predictive control for hybrid systems. implications of polyhedral pre-computations," *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, vol. 2, no. 2, pp. 510–531, 2008.
81. F. Blanchini and S. Miani, "Set based constant reference tracking for continuous-time constrained systems," *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, p. 121.
82. S. Oлару and D. Dumur, "Compact Explicit MPC Law with Guarantees of Feasibility for Reference Tracking," *Nonlinear dynamics and systems theory*, vol. 7, no. 4, pp. 379–398, 2007.
83. S. Dobre, S. Oлару, and D. Dumur, "Explicit predictive control laws with a nonlinear constraints handling mechanism," in *EUROCON 2007, Warsaw, Poland*, 2007.
84. S. Oлару, D. Dumur, and S. Dobre, "On the geometry of predictive control with nonlinear constraints," in *Informatics in Control, Automation and Robotics*. Springer, pp. 301–314.
85. A. Ulbig, S. Oлару, D. Dumur, and P. Boucher, "Explicit solutions for nonlinear model predictive control : A linear mapping approach," in *9th European Control Conference*, 2007, pp. 3295–3302.
86. A. Ulbig, S. Oлару, and D. Dumur, "Explicit model predictive control for a magnetic levitation system," in *2008 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2008, pp. 1544–1549.
87. A. Ulbig, S. Oлару, D. Dumur, and P. Boucher, "Explicit nonlinear predictive control for a magnetic levitation system," *Asian Journal of Control*, 2010.
88. F. Scibilia, S. Oлару, and M. Hovd, "Approximate explicit linear mpc via delaunay tessellation," in *European Control Conference, Budapest Hungary*, 2009.
89. M. Hovd, F. Scibilia, J. Maciejowski, and S. Oлару, "Verifying stability of approximate explicit MPC," in *Proceedings of the the IEEE Control and Decision Conference, Shanghai, China*, 2009.
90. M. Hovd and S. Oлару, "Piecewise quadratic Lyapunov functions for stability verification of approximate explicit MPC," *Modeling, Identification and Control*, vol. 31, no. 2, pp. 45–53, 2010.
91. H. N. Nguyen, S. Oлару, and M. Hovd, "Patchy approximate explicit model predictive control," in *International Conference on Control, Automation and Systems*, 2010.
92. S. Oлару and P. Ayerbe, "Robustification of explicit predictive control laws," in *2006 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006, pp. 4556–4561.
93. P. Rodríguez-Ayerbe and S. Oлару, "Off-line robustification of explicit mpc laws - the case of polynomial model representation," in *ICINCO-SPSMC*, 2008, pp. 96–101.
94. P. Rodríguez-Ayerbe and S. Oлару, "Off-line robustification of explicit control laws," in *17th IFAC World Congress*, 2008, 2008.
95. S. Oлару, H. Benlaoukli, and S.-I. Niculescu, "Mpc for systems with variable time-delay - robust positive invariant set approximations." in *ICINCO-SPSMC*, J. Filipe, J. Andrade-Cetto, and J.-L. Ferrier, Eds. INSTICC Press, 2008, pp. 177–182.

96. H. Benlaoukli, M. Hovd, and S. Olaru, "Geometrical characterization of robust predictive control strategies," *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, vol. 10, no. 4, p. 13, 2008.
97. P. Falugi, S. Olaru, and D. Dumur, "Robust multi-model predictive control using lmis," in 17th IFAC World Congress, 2008, 2008.
98. —, "Robust multi-model predictive control using LMIs," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 8, no. 1, pp. 169–175, 2010.
99. —, "Explicit robust multi-model predictive control using lmis," in 16th Mediterranean control conference, 2008, 2008.
100. —, "Multi-model predictive control based on LMI. From the adaptation of the state-space model to the analytic description of the control law." *International Journal of Control*, pp. –, 2010.
101. G. Marafioti, S. Olaru, and M. Hovd, "State Estimation in Nonlinear Model Predictive Control, Unscented Kalman Filter Advantages," in *Nonlinear Model Predictive Control*. Springer, pp. 305–313.
102. Z. Artstein and S. V. Rakovic, "Feedback and invariance under uncertainty via set-iterates," *Automatica*, vol. 44, no. 2, pp. 520–525, 2008.
103. E. Gilbert and K. Tan, "Linear systems with state and control constraints : The theory and application of maximal output admissible sets." *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36(9), pp. 1008–1020, 1991.
104. H. Benlaoukli and S. Olaru, "On the computation and bounding of invariant sets," in *International Conference on Control, Automation and Systems ICCAS*, Seoul, Korea, 2007.
105. —, "Computation and bounding of robust invariant sets for uncertain systems," in *Proceedings of the IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
106. H. Benlaoukli, M. Hovd, S. Olaru, and P. Boucher, "Invariant sets for pwa systems using transition graph," in *7th IEEE International Conference on Control and Automation ICCA*, Nouvelle Zélande, Décembre 2009.
107. H. Benlaoukli and S. Olaru, "Feasible tracking reference set computation using the principle of invariant set construction," in *7th IEEE International Conference on Control and Automation ICCA*, Nouvelle Zélande, Décembre 2009.
108. F. Scibilia, R. Bitmead, S. Olaru, and M. Hovd, "Maximal robust feasible sets for constrained linear systems controlled by piecewise affine feedback laws," in *7th International Conference on Control and Automation, New Zealand*, 2009.
109. F. Scibilia, S. Olaru, and M. Hovd, "Positive invariant sets for fault tolerant multisensor control schemes." *under review, Automatica*, 2010.
110. J. Thomas, S. Olaru, J. Buisson, and D. Dumur, "Attainability and set analysis for uncertain PWA systems with parameter variations and bounded disturbance," in *Proceedings of the 21st annual international conference on Chinese control and decision conference*. IEEE Press, 2009, pp. 4259–4265.
111. Y. Lee and B. Kouvaritakis, "Receding horizon control of switching systems," *Automatica*, vol. 45, no. 10, pp. 2307–2311, 2009.
112. S. Olaru and M. Hovd, "Metrics Over the Class of Polyhedra and Several Correspondences in Constrained Control," in *IEEE International Conference on Control and Automation, 2007. ICCA 2007*, 2007, pp. 3162–3168.

113. S. Olaru, J. De Doná, and M. Seron, "Positive invariant sets for fault tolerant multisensor control schemes," in *Proceedings of the IFAC World Congress*. Seoul, Korea : International Federation of Automatic Control, 2008.
114. S. Rakovic, "Minkowski algebra and Banach Contraction Principle in set invariance for linear discrete time systems," in *Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on*, 2007, pp. 2169–2174.
115. Y. Tipsuwan and M. Chow, "Control methodologies in networked control systems," *Control Engineering Practice*, vol. 11, no. 10, pp. 1099–1111, 2003.
116. J. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu, "A survey of recent results in networked control systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 138–162, 2007.
117. S. Olaru and S. Niculescu, "Predictive control for linear systems with delayed input subject to constraints," in *Proc. IFAC World Congress*, 2008.
118. W. Lombardi, S. Olaru, and S. Niculescu, "Invariant sets for a class of linear systems with variable time-delay," in *Proc. European Control Conf*, 2009.
119. W. Lombardi, S. Olaru, and S.-I. Niculescu, "Robust invariance for a class of time-delay systems with repeated eigenvalues," in *8th IFAC Workshop on Time Delay Systems, Sinaia Romania*, 2009.
120. R. Gielen, S. Olaru, and M. Lazar, "On polytopic approximations of systems with time-varying input delays," in *Nonlinear Model Predictive Control*. Springer, pp. 225–233.
121. R. Gielen, S. Olaru, M. Lazar, W. Heemels, N. van de Wouw, and S.-I. Niculescu, "On polytopic inclusions as a modeling framework for systems with time-varying delays," *Automatica*, vol. 46, no. 3, pp. 615 – 619, 2010.
122. W. Heemels, N. van de Wouw, R. Gielen, M. Donkers, L. Hetel, S. Olaru, M. Lazar, J. Daafouz, and S. Niculescu, "Comparison of overapproximation methods for stability analysis of networked control systems," in *Proceedings of the 13th ACM international conference on Hybrid systems : computation and control*. ACM, 2010, pp. 181–190.
123. W. Lombardi, A. Luca, S. Olaru, and S. Niculescu, "State admissible sets for discrete systems under delay constraints," in *IEEE American Control Conference*, 2010.
124. W. Lombardi, A. Luca, S. Olaru, S. Niculescu, and J. Cheong, "Feedback Stabilization and motion synchronization of systems with time-delay in the communication network," in *9th IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, 2010.
125. A. Savkin and R. Evans, *Hybrid Dynamical Systems : Controller and Sensor Switching Problems*. Boston : Birkhäuser, 2002.
126. S. Olaru, J. De Doná, M. Seron, and F. Stoican, "Positive invariant sets for fault tolerant multisensor control schemes." *under review, International Journal of Control*, 2009.
127. F. Stoican, S. Olaru, J. A. DeDoná, and M. Seron, "Reference governor for tracking with fault detection capabilities," in *Proceedings of the the IEEE Systol Conference, Nice, France*, 2010.
128. Stoican, S. Olaru, and G. Bitsoris, "A fault detection scheme based on controlled invariant sets for multisensor systems," in *Proceedings of the the IEEE Systol Conference, Nice, France*, 2010.



129. Stoican, S. Olaru, J. A. DeDonna, and M. Seron, "A fault tolerant control scheme based on sensor switching and dwell time," in *Proceedings of the the IEEE Control and Decision Conference, Atlanta, USA*, 2010.
130. P. Colaneri, "Dwell time analysis of deterministic and stochastic switched systems." 2009.
131. S. Olaru, F. Stoican, J. A. DeDonna, and M. Seron, "Necessary and sufficient conditions for sensor recovery in a multisensor control scheme," in *7th IFAC Safeprocess, Barcelona, Spain*, 2009.
132. —, "Improvements in the sensor recovery mechanism for a multisensor control scheme," in *Proceedings of the 29th American Control Conference, Baltimore, USA*, 2010.
133. S. Olaru, J. Thomas, D. Dumur, and J. Buisson, "Genetic Algorithm based Model Predictive Control for Hybrid Systems under a Modified MLD Form," *International Journal of Hybrid Systems*, vol. 4, no. 1-2, pp. 113–132, 2004.
134. S. Olaru, I. Dumitrache, and D. Dumur, "Modified MLD form for discrete optimization of hybrid systems," in *Analysis and design of hybrid systems 2003 (ADHS 03) : a proceedings volume from the IFAC Conference, St. Malo, Brittany, France, 16-18 June 2003*. Elsevier Science Ltd, 2003, p. 135.
135. H. N. Nguyen and S. Olaru, "Hybrid modeling and optimal control of juggling systems," in *4th International Conference on System Theory and Control*, 2010.
136. W. Heemels, B. De Schutter, and A. Bemporad, "Equivalence of hybrid dynamical models\* 1," *Automatica*, vol. 37, no. 7, pp. 1085–1091, 2001.
137. J. Thomas, D. Dumur, S. Olaru, and J. Buisson, "Reachability and Robust Control of PWA Systems with Parameter Variations and Bounded Disturbance," in *IFAC World Congress*, 2008.
138. —, "Robust model predictive control for piecewise linear hybrid systems," in *2nd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, 2006.
139. E. Asarin, O. Bournez, T. Dang, and O. Maler, "Approximate reachability analysis of piecewise-linear dynamical systems," *Hybrid Systems : Computation and Control*, p. 20, 2000.
140. M. Johansson and A. Rantzer, "Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 43, no. 4, pp. 555–559, 1998.
141. S. Olaru and D. Dumur, "Constrained predictive control for position tracking of an induction motor," *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, vol. 7, no. 3, pp. 40–47, 2005.
142. P. Rodriguez and D. Dumur, "Generalized predictive control robustification under frequency and time-domain constraints," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 13, no. 4, p. 577, 2005.
143. E. Witrant, A. D’Innocenzo, G. Sandou, F. Santucci, M. Di Benedetto, A. Isaksson, K. Johansson, S. Niculescu, S. Olaru, E. Serra, *et al.*, "Wireless ventilation control for large-scale systems : The mining industrial case," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 20, no. 2, pp. 226–251, 2010.
144. G. Sandou, E. Witrant, S. Olaru, and S. Niculescu, "Receding horizon climate control in metal mine extraction rooms," in *IEEE CASE’08*, 2008.

145. G. Sandou and S. Olaru, "Particle swarm optimization based nmpe : An application to district heating networks," in *Nonlinear Model Predictive Control, Springer LNCIS*, ser. Lecture Notes in Control and Information Science, vol. 384, 2009, pp. 551–559.
146. —, "Ant colony and genetic algorithm for constrained predictive control of power systems," in *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 4416. Springer, pp. 501–514.
147. F. Stoican, S. Olaru, M. Nesic, and S. Marinkovic, "Control Design of a Positioning System upon a Fault Tolerant Multisensor Scheme," in *17th Telecommunications forum TELFOR*, 2009, pp. 685–688.
148. S. E. AKOUM and K. NASSER-EDDINE, "Optimization of the anchoring mechanism of a novel steerable drilling system," *Technical report*, 2007.
149. J. BARCAT, N. BENOTMANE, and O. LESZCZYNSKI, "Détermination du domaine de viabilité des offres d'ajustement en infra-journalier pour une vallée hydraulique," *Technical report*, 2009.
150. H. Benlaoukli, *Méthodes géométriques pour la construction des ensembles invariants. Application à la faisabilité des lois de commande prédictive*. France : Université Paris XI, Orsay, 2009.
151. J. Martinez, X. Zhuo, J. De Dona, and M. Seron, "Multi-sensor switching strategy for automotive longitudinal control," in *American Control Conference, 2006*, 14-16 2006.
152. M. M. Seron, X. W. Zhuo, J. A. D. Doná, and J. J. Martínez, "Multisensor switching control strategy with fault tolerance guarantees," *Automatica*, vol. 44, no. 1, pp. 88–97, 2008.
153. W. Lombardi, A. Luca, S. Olaru, S.-I. Niculescu, P. Boucher, and J. Cheong, "Synchronisation de mouvement sous contraintes pour des systèmes à retard," in *Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Nancy, France, 2-4 June 2010*. Elsevier Science Ltd, 2003, p. 135.
154. G. Bitsoris, "Positively invariant polyhedral sets of discrete-time linear systems," *International Journal of Control*, vol. 47, no. 6, pp. 1713–1726, 1988.
155. M. Enache, "Assistance préventive à la sortie de voie," 2008.
156. J. Akre, J. Juillard, S. Olaru, G. D., and C. E., "Determination of the behaviour of self-sampled digital phase-locked loops," in *53rd IEEE Internationall Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 2010.
157. A. Nemirovski, "Lectures on modern convex optimization," *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)*, 2001.
158. I. Necoara and J. Suykens, "Application of a smoothing technique to decomposition in convex optimization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 11, pp. 2674–2679, 2008.
159. W. Dunbar and R. Murray, "Distributed receding horizon control for multi-vehicle formation stabilization," *Automatica*, vol. 42, no. 4, pp. 549–558, 2006.
160. T. Keviczky, F. Borrelli, and G. Balas, "Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems," *Automatica*, vol. 42, no. 12, pp. 2105–2115, 2006.
161. H. Smith and P. Waltman, *The theory of the chemostat*. Cambridge University Press Cambridge, UK, 1995.

162. J.-P. Aubin, J. Lygeros, M. Quincampoix, S. Sastry and N. Seube. "Impulse differential inclusions : a viability approach to hybrid systems". *IEEE Transactions on Automatic Control* 47(1), pp. 2-20, 2002.
163. M. Baes, M. Diehl, and I. Necoara, "Every continuous nonlinear control system can be obtained by parametric convex programming," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 8, pp. 1963–1967, Sept. 2008.
164. A. Bemporad, F. Borelli, and M. Morari, "Model predictive control based on linear programming : The explicit solution," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, pp. 1974–1985, 2002.
165. A. Bemporad and M. Morari, "Control systems integrating logic, dynamics and constraints", *Automatica* 35(3),407-427, (1999).
166. A. Bemporad, D. Mignone and M. Morari, "Moving estimation for hybrid systems and fault detection", /emphIn Proceedings of the American Control Conference, San Diego, (1999a).
167. A. Bemporad, D. Mignone and M. Morari, "An Efficient Branch and Bound Algorithm for State Estimation and Control of Hybrid Systems", *Proceedings of the European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, (1999b).
168. A. Bemporad and D. Mignone, "Hysdel - a tool for generating hybrid models", *Technical report AUT00-03*, Automatic control laboratory, ETH Zürich, (2000).
169. Bemporad, A., Morari, M., Dua, V., Pistikopoulos, E. ; "The explicit linear quadratic regulator for constrained systems", *Automatica*, **vol.38**, pp. 3-20, (2002).
170. R. Bitmead, M. Gevers, and V.Wertz, *Adaptive optimal control : The thinking man's GPC*. Prentice Hall International, 1990.
171. F. Blanchini, "Set invariance in control", *Automatica*, Vol. 35, pp. 1747-1767, 1999.
172. M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki . *Diagnosis and Fault-tolerant Control* . Springer-Verlag, 2006.
173. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, USA, 1994.
174. Borelli, F., "Constrained Optimal Control of Linear and Hybrid Systems", Springer, (2003).
175. F. Borelli, A. Bemporad, and M. Morari, "A geometrical algorithm for multi-parametric linear programming," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 118(3), pp. 515–540, 2003.
176. P. Boucher and D. Dumur, *La commande predictive*. Paris : Technip, 1996.
177. M.S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched hybrid systems. *IEEE Trans. Automat. Control* 43, pp. 475-482, 1998.
178. M.S. Branicky, V.S. Borkar and S.K. Mitter, "A unified framework for hybrid control : model and optimal control theory", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 43(1), 31-45, (1998).
179. J. Buisson and P. Bergomi, "Application of GPC to the control of switching linear systems", *Journal A*, 35(3) :59-64, October, (1994).
180. E.F. Camacho and C. Bordons, *Model Predictive Control*, Springer, (2003).
181. J.E. Normey-Rico and E.F. Camacho. *Control of Dead-time Processes*. Springer, London, 2007.

182. D.W. Clarke, C. Mohtadi, P.S. Tuffs, "Generalized Predictive Control, Part I and II", *Automatica*, vol. 23-2, pp. 137-160, (1987).
183. Ph. Clauss, V. Loechner and D.K. Wilde, "Deriving Formulae to Count Solutions to Parameterized Linear Systems using Ehrhart Polynomials : Applications to the Analysis of Nested-Loop Programs", ICPS RR 97-05, April 1997.
184. J.M. Da Costa Sousa, "Fuzzy model-based control of complex processes", *The Annals of the Marie Curie Fellowship Association*, 1(1) (2000).
185. B.V. Dasarathy. Sensor fusion potential exploitation-Innovative architectures and illustrative applications. *Proceedings of the IEEE*, 85(1) :24-38, January 1997.
186. G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1963.
187. G. Dolanc, D. Juricic, A. Rakar, J. Petrovic and D. Vrancic, "3-tank Benchmark Test", *Technical Report Copernicus Project Report CT94-02337*, (1997).
188. V. Dua, E. N. Pistikopoulos, and M. C. Georgiadis. *Multi-Parametric Model-Based Control : Theory and Applications*. Wiley-VCH Verlag, Weinheim, Germany, 2007.
189. N. Dulay, "Introduction to Genetic Algorithms", [http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise\\_96/journal/vol1/hmw/article1.html](http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise_96/journal/vol1/hmw/article1.html), (1996).
190. D. Dumur and P. Boucher, "A Review Introduction to Linear GPC and Applications", *Journal A*, 39(4), pp. 21-35 (1998).
191. P. Falugi, S. Olaru, and D. Dumur, "Robust multi-model predictive control using lmis," *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2010.
192. R. Fletcher and S. Leyffer, "Numerical experience with lower bounds for MIQP branch and bound", *Technical report*, Dept. of Mathematics, University of Dundee, Scotland. <http://www.mcs.-dundee.ac.uk:8080/sleyffer/miqp-art.ps.z>, (1995).
193. M. Fliess, J. Levine, Ph. Martin, and P. Rouchon On differentially flat nonlinear systems. *Proc. of the 3 IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design*, Bordeaux, France, pp. 408-412, 1992.
194. S. Fortune "Voronoi diagrams and Delaunay triangulations", In D. Z. Du and F. Hwang, editors, *Computing in EUclidean Geometry*, vol. 1, pp. 193-234, World Scientific, 1992.
195. I.A. Fotiou , P. Rostalski, B. Sturmfelds and M. Morari, "An algebraic geometry approach to nonlinear parametric optimization in control", *American Control Conference*, Minneapolis, 2005.
196. Furtmueller, C. and del Re, L. (2006). Disturbance suppression for an industrial level control system with uncertain input delay and uncertain gain. In *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, pages 3206-3211.
197. T. Gal, *Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics*, de Gruyter, Berlin, 6, 1995.
198. T. Gal and J. Nedoma, "Multiparametric Linear Programming". *Management Science*, vol. 18, pp. 406-442, 1972.
199. P. E. Gill, W. Murray, M.H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, London, UK, 1981.

200. C. Garcia and M. Morari, "Internal model control. a unifying review and some new results," *IEC Process Design and Development*, vol. 21, pp. 308–323, 1982.
201. Gilbert, E. and Tan, K. (1991). Linear systems with state and control constraints : The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 :1008–1020.
202. R. Goebel, J. Hespanha, A. Teel, C. Cai, R. Sanfelice. "Hybrid systems : generalized solutions and robust stability", *Proc. NOLCOS*, 2004.
203. Goodwin, G.C., Seron, M.M. and De Dona, J.A., *Constrained Control and Estimation*. Springer-Verlag, London, (2004).
204. A. Grancharova, P. Tøndel and T. A. Johansen, "Computational Aspects of Approximate Explicit Nonlinear Model Predictive Control", *NMPC'05 — International Workshop on Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*, Freudenstadt-Lauterbad, Germany, 2005.
205. K. Gu, V. L. Kharitonov, J. Chen. *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhauser, Boston, USA, (2003).
206. R.L. Haupt and S.E. Haupt, *Practical Genetic Algorithms*, Wiley, New York, (1998).
207. J.P. Hayes, *Introduction to digital logic design*. Reading : Addison-Wesley, (1993).
208. C. Helmberg and F. Rendl, "Solving Quadratic (0,1) Problems by Semidefinite Programming and Cutting Planes", *Mathematical Programming*, 82, 291-315 (1996).
209. J. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95 :138–162, 2007.
210. C. R. Houck, J. A. Joines and M. G. Kay, "A Genetic Algorithm for Function Optimization : A Matlab Implementation", [www.ie.ncsu.edu/mirage/GAToolBox/gaot/](http://www.ie.ncsu.edu/mirage/GAToolBox/gaot/), (1995).
211. K. Hirata and Y. Ohta.  $\epsilon$ -feasible approximation of the state reachable set for discrete-time systems. In *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, volume 5, pages 5520–5525, 2003.
212. M. Hovd, F. Scibilia, J. M. Maciejowski, and S. Olaru, "Verifying stability of approximate explicit mpc," in *48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai China*, 2009.
213. Kalman, R. E. (1964). When is a linear control system optimal? *Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, Series D*, 86 :81–90.
214. Karmarkar, N. "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming." *Combinatorica* 4, 373-395, 1984.
215. E.C. Kerrigan, J.M. Maciejowski. "Feedback min-max model predictive control using a single linear program : robust stability and the explicit solution". *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 14(4) (2004) 395-413.
216. E.J. Kofman, H. Haimovich and M.M. Seron. A systematic method to obtain ultimate bounds for perturbed systems. *International Journal of Control*, 80 :167–178, 2007.
217. I. Kolmanovsky and E. G. Gilbert. Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Math. Prob. Eng. :Theory, Methods, Applications*, 4 :317–367, 1998.

218. B. Kouvaritakis, M. Cannon, and J. Rossiter, "Who needs qp for mpc anyway?" *Automatica*, vol. 38(5), pp. 897–884, 2002.
219. M.V. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari. Linear systems with state and control constraints : The theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 :1008–1020, 1991.
220. W. Kwon and S. Han, *Receding Horizon Control : Model Predictive Control for State Models*, 1st ed. London : Springer-Verlag, 2005.
221. M. Lazar, *Model predictive control of hybrid systems : Stability and Robustness*. Eindhoven : TUE, 2006.
222. V. Larin. About the inverse problem of optimal control. *Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2 :90–97, (2003).
223. Leverage, H., "A note on Chernikova's algorithm", *Technical Report, IRISA 635*, (1994).
224. Loechner, V. and Wilde, D. K., "Parameterized polyhedra and their vertices". *Int. J. of Parallel Programming*, **25(6)**, (1997).
225. W. Lombardi, S. Olaru, and S.-I. Niculescu, "Invariant sets for a class of linear systems with variable time-delay," in *European Control Conference, Budapest Hungary*, 2009.
226. —, "Robust invariance for a class of time-delay systems with repeated eigenvalues," in *8th IFAC Workshop on Time Delay Systems, Sinaia Romania*, 2009.
227. K.W. Lothrop, "Conceptual Design Optimization of a Cis-Lunar Transportation Architecture Using Genetic Algorithms", *Thesis*, Jan. (2003).
228. R. Lozano, P.G. Gil, P. Castillo, and A. Dzul. Robust prediction-based control for unstable delay systems. In S.I. Niculescu and K. Gu, editors, *Advances in Time-Delay Systems*, pages 311–326. Springer, Heidelberg, 2004.
229. R.C. Luo, C.-C. Yih, and K.L. Su. Multisensor fusion and integration : approaches, applications, and future research directions. *IEEE Sensors Journal*, 2 (2) :107–119, April 2002.
230. J. Lygeros, K.H. Johansson, S.N. Simic, J. Zhang, S.S. Sastry. "Dynamical properties of hybrid automata". *IEEE Trans. Automat. Control* 48(1), pp. 2-17, 2003.
231. J.J. Martinez and C. Canudas de Wit. Model reference control approach for safe longitudinal control. In *Proc. of the 2004 American Control Conference*, 2004.
232. D.Q. Mayne, J.B. Rawlings, C.V. Rao, P.O.M. Scokaert, "Constrained model predictive control : Stability and optimality", *Automatica* **36** (2000) 789-814
233. D. Mayne and W. Schroeder, "Robust time-optimal control of constrained linear systems", *Automatica*, vol. 33, pp. 2103–2118, 1997.
234. E. Mosca, *Optimal Predictive and Adaptive Control*. Prentice Hall, 1995.
235. J.M. Maciejowski. *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall, England, 2002.
236. Z. Michalewicz, *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, Springer, NY, (1996).
237. W. Michiels, S.-I. Niculescu. *Stability and stabilization of time delay systems. An eigenvalue based approach*. SIAM, Philadelphia, USA, (2007).

238. Motzkin, T.S., Raiffa, H., Thompson, G.L. and Thrall R.M., "The Double Description Method", (1953) republished in *Theodore S. Motzkin : Selected Papers*, Birkhauser, Boston, (1983).
239. S.-I. Niculescu. *Delay effects on stability. A robust control approach*. Springer, Heidelberg, 2001.
240. Olaru, S. and Dumur D., "A Parameterized Polyhedra Approach for Explicit Constrained Predictive Control", *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, (2004).
241. S. Olaru, D. Dumur. "Avoiding Constraints Redundancy in Predictive Control Optimization Routines", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(9) : 1459-1466, (2005).
242. S. Olaru, D. Dumur, and S. Tebbani, "Parameterized polyhedra approach for robust constrained generalized predictive control," *Proceedings of IEEE Conference on Control Applications*, pp. 428–433, 2005.
243. Olaru, S., Dumur D. : Compact explicit MPC with guarantee of feasibility for tracking. *44th IEEE Conference on Decision and Control* (2005) 969- 974 .
244. S. Olaru and D. Dumur. A parameterized polyhedra approach for the explicit robust model predictive control. In J. Filipe, J.-L. Ferrier, J. A. Cetto, and Carvalho, editors, *Informatics in Control, Automation and Robotics II*. Springer, 2007.
245. S. Olaru, I. Dumitrache, D. Dumur, "On the continuity of control laws based on multiparametric linear programming", *13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation*, Paris - Cachan, France, 26 - 28 April 2006.
246. Olaru, S., Dumur, D., Thomas, J., Zainea, M. : Predictive control for hybrid systems. Implications of polyhedral pre-computations. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems and Applications Elsevier* **2(2)** (2008) 510-531.
247. S. Olaru, J. Thomas, D. Dumur and J. Buisson, "Genetic Algorithm based Model Predictive Control for Hybrid Systems under a Modified MLD Form", *International Journal of Hybrid Systems*, Vol. 4(1-2), pp. 113-132 (2004).
248. S. Olaru. "Contribution a l'etude de la commande predictive sous contraintes par approche geometrique", PhD thesis, [www.supelec.fr/ProjetWeb/sag\\_Dossier/sag/biblio/abstract/Sorin.pdf](http://www.supelec.fr/ProjetWeb/sag_Dossier/sag/biblio/abstract/Sorin.pdf).
249. S. Olaru, J. A. De Dona, M. M. Seron. "Positive invariant sets for fault tolerant multisensor control schemes". In *Proceedings of the IFAC World Congress*, Seoul, Korea (2008) 1224-1229.
250. Olaru, S., Dumur, D., Dobre, S. :On the geometry of predictive control with nonlinear constraints. *Informatics in Control, Automation and Robotics IV*, Filipe, J. ; Ferrier, J.-L. ; Cetto, J.A. ; Carvalho, M. (Eds.) Springer 2008, 301-314.
251. S. Olaru, D. Dumur, "Explicit constrained model predictive control. The influence of constraints redundancy", *5th IEEE International Conference on Control and Automation*, Budapest, Hongrie, 26-29 June 2005.
252. S. Olaru, J.A. De Doná, and M.M. Seron Positive invariant sets for fault tolerant multisensor control schemes. *Proc. 17 IFAC World Congress*, 2008.
253. S. Olaru, F. Stoican, J. A. DeDoná, and M. Seron, "Necessary and sufficient conditions for sensor recovery in a multisensor control scheme," in *7th IFAC Safeprocess, Barcelona, Spain*, 2009.

254. "Polylib," <http://www.irisa.fr/polylib>, 2006.
255. J. S. Qin and T. A. Badgwell, "An overview of industrial model predictive control technology," in *Proceedings of AIChE Symposium on Chemical Process Control*, vol. 93, 1997, p. 232-256.
256. D. Quevedo, G. Goodwin, J. DeDona, "Finite constrained set receding horizon quadratic control", *International journal of robust and nonlinear control*, Vol. 14, pp. 355-377, 2004.
257. S. Rakovic, "Set theoretic methods in model predictive control," *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 384, 2009.
258. S. Rakovic, A. R. Teel, D. Q. Mayne, and A. Astolfi, "An overview of industrial model predictive control technology," in *Proceedings of the 45th Conference on Decision and Control*, 2006.
259. S. V. Raković, E. C. Kerrigan, K. I. Kouramas, and D. Q. Mayne. Invariant approximations of the minimal robust positively invariant set. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50 :406-410, 2005.
260. R. Raman and I.E. Grossmann, "Relation between MILP modeling and logical inference for chemical process synthesis", *Computer and Chemical Engineering* 15(2), 73-84, (1991).
261. V. Rasvan, *Contributii la dezvoltarea automatizarii neliniare*. Craiova : Editura Universitaria Craiova, 2005.
262. J. Richalet, *Pratique de la commande predictive*. Paris : Hermes, 1993.
263. J. A. Rossiter, *Model - based predictive control. A practical approach* CRC Press, 2003.
264. G. Sandou and S. Olaru, "Ant colony and genetic algorithm for constrained predictive control of power systems," *Lecture Notes in Computer Science, Springer*, vol. 4416, pp. 501-514, 2007.
265. —, "Particle swarm optimization based nmPC : An application to district heating networks," *Nonlinear Model Predictive Control, Springer LNCIS*, vol. 384, pp. 551-559, 2009.
266. A. Schrijver, "Theory of linear and integer programming", John Wiley and Sons, NY, (1986).
267. F. Scibilia, S. Olaru, and M. Hovd, "Approximate explicit linear MPC via delaunay tessellation," in *European Control Conference, Budapest Hungary*, 2009.
268. F. Scibilia, R. Bitmead, S. Olaru, and M. Hovd, "Maximal robust feasible sets for constrained linear systems controlled by piecewise affine feedback laws," in *7th International Conference on Control and Automation, New Zealand*, 2009.
269. Scokaert, P. O.M., Mayne, D. Q., and Rawlings, J. B. "Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability)". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(3), 648-654, (1999).
270. Seron, M.M., Goodwin, G.C. and De Dona J.A., "Characterisation of Receding Horizon Control for Constrained Linear Systems", *Asian Journal of Control*, vol. 5-2, pp. 271-286, (2003).
271. M.M. Seron, X.W. Zhuo, J.A. De Doná, J.J. Martínez. Multisensor switching control strategy with fault tolerance guarantees. *Automatica*, 2008.



272. J. Spjøtvold, P. Tondel, and T. A. Johansen, "A method for obtaining continuous solutions to multiparametric linear programs," in *Proceedings of IFAC World Congress 2005*, Prague, Czech Republic.
273. O. Stursberg and S. Panek, "Control of switched hybrid systems based on disjunctive formulations", *5th Int. workshop on hybrid systems : Computation and Control*, Stanford (CA, USA), (2002).
274. S.-L. Sun and Z.-L. Deng. Multi-sensor optimal information fusion Kalman filter. *Automatica*, 40(6) :1017–1023, 2004.
275. S. Tarbouriech, C. T. Abdallah, and M. Ariola, "Bounded control of multiple-delay systems with applications to atm network," in *Advances in Time-Delay Systems*, S. Niculescu and K. Gu, Eds. Heidelberg : Springer, 2004, pp. 311–326.
276. J. Thomas, S. Olaru, J. Buisson, and D. Dumur, "Attainability and set analysis for uncertain pwa systems with parameter variations and bounded disturbance," in *21st Chinese Control and Decision Conference, Guilin*, 2009.
277. J. Thomas, J. Buisson, D. Dumur and H. Guéguen, "Predictive Control of Hybrid Systems under a Multi-MLD Formalism", *IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems ADHS 03*, Saint-Malo, France, pp. 64-69, (2003).
278. P. Tondel, T. Johansen, A. Bemporad. "An algorithm for multi-parametric quadratic programming and explicit MPC solutions". *Proc. 40th IEEE CDC* 1199-1204, (2001).
279. P. Tondel, T. Johansen, and A. Bemporad, "An algorithm for multi-parametric quadratic programming and explicit MPC solutions," *Automatica*, vol. 39(3), pp. 3173–3178, 2003.
280. A. Ulbig, S. Olaru, D. Dumur, and P. Boucher, "Explicit nonlinear predictive control for a magnetic levitation system," *Asian Journal of Control*, 2010.
281. M.B. Wall, "Introduction to Genetic Algorithms", <http://lancet.mit.edu/mb-wall/presentations/IntroTo-GAs/>.
282. Wilde, D.K., "A library for doing polyhedral operations", *Technical report, IRISA 785*, (1993).
283. S. J. Wright. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. Philadelphia, PA : SIAM, 1997.
284. E. Witrant, A. D’Innocenzo, G. Sandou, F. Santucci, M. D. Benedetto, A. Isaksson, K. Johansson, S. Niculescu, S. Olaru, E. Serra, S. Tennina, and U. Tiberi, "Wireless ventilation control for large-scale systems : the mining industrial case." *To appear in International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009.